

CE-003: Estatística II - Turma: MD, 1ª Prova (10/03/2014)

GRR: _____ **Nome:** _____ **Turma:** _____

1. Peças que saem de uma linha de produção são marcadas como defeituosas (D) ou não defeituosas (N). A proporção de peças defeituosas na linha de produção é denotada por p . Peças são inspecionadas e sua condição (D ou N) é registrada. Isto é feito até que duas peças defeituosas consecutivas sejam fabricadas ou que quatro peças tenham sido inspecionadas, aquilo que ocorrer primeiro.
 - (a) Descreva o espaço amostral do experimento.
 - (b) Atribua probabilidades a cada ponto do espaço amostral.
 - (c) Qual (quais) a(s) suposição(ões) feita(s) no cálculo das probabilidades.
 - (d) Qual a probabilidade do evento *quatro peças são inspecionadas*.
 - (e) Qual a probabilidade do evento *quatro peças são inspecionadas sabendo-se que a primeira inspecionada era defeituosa*.

Solução:

(a)

$$\Omega = \{(D, D), (N, D, D), (D, N, D, D), (D, N, D, N), (D, N, N, D), (N, N, D, D), (N, D, N, D), (D, N, N, N), (N, D, N, N), (N, N, N, D), (N, N, D, N), (N, N, N, N)\}$$

(b)

$$\begin{aligned} \{(D, D)\} &: P = p^2 \\ \{(N, D, D)\} &: P = (1-p)p^2 \\ \{(D, N, D, D)\} &: P = (1-p)p^3 \\ \{(D, N, D, N), (D, N, N, D), (N, N, D, D), (N, D, N, D)\} &: P = (1-p)^2 p^2 \\ \{(D, N, N, N), (N, D, N, N), (N, N, N, D), (N, N, D, N)\} &: P = (1-p)^3 p \\ \{(N, N, N, N)\} &: P = (1-p)^4 \end{aligned}$$

(c) Independência, probabilidade p permanece constante.

(d)

$$\begin{aligned} &P[(D, N, D, D), (D, N, D, N), (D, N, N, D), (N, N, D, D), (N, D, N, D), \\ &(D, N, N, N), (N, D, N, N), (N, N, N, D), (N, N, D, N), (N, N, N, N)] = \\ &= (1-p)^1 * p^3 + 4 * (1-p)^2 * p^2 + 4 * (1-p)^3 * p + (1-p)^4 \end{aligned}$$

ou

$$P[(D, D), (N, D, D)] = 1 - p^2 - (1-p)p^2$$

(e)

$$P[(D, N, D, D), (D, N, D, N), (D, N, N, D), (D, N, N, N)] = (1-p)^1 * p^3 + 2 * (1-p)^2 + (1-p)^4$$

2. Três equipes, I , II e III , vão ter jogos contra outros adversários em uma determinada rodada de um campeonato. Informações sobre as equipes e resultados anteriores mostram que a probabilidade de I vencer o seu jogo é de 0,7; enquanto que a probabilidade de II vencer seu jogo é de 0,5 e a de III é 0,9. Não há a possibilidade de empate nos jogos. Considere como independentes os resultados das três equipes na rodada e responda às questões a seguir.
 - (a) O resultado da rodada é um experimento aleatório? Porque?
 - (b) Qual o espaço amostral?
 - (c) Qual a probabilidade de alguma das equipes (ao menos uma) perder a sua partida?
 - (d) Sabendo-se que III venceu a partida, qual a probabilidade de que ambas as demais equipes tenham pedido?
 - (e) Os eventos I vence o jogo e II vence o jogo são mutuamente exclusivos? Justifique.

Solução:

3. Uma empresa adquire 30% de sua matéria prima de um primeiro fornecedor, 50% de um segundo e o restante de um terceiro fornecedor. Os lotes de matéria prima são inspecionados e, se considerados não satisfatórios, são enviados de volta. Sabe-se que 2%, 5% e 1% dos lotes são retornados a cada fornecedor, respectivamente. Calcule as probabilidades de um lote tomado ao acaso:
- ser do fornecedor *II* e não retornar;
 - ser devolvido;
 - havendo sido rejeitado, ser do fornecedor *II*
 - havendo sido rejeitado, ser do fornecedor *III*
 - havendo sido aceito, ser do fornecedor *I*

Solução:

4. Considere que um componente de um sistema de reconhecimento é composto de um código de três algarismos que podem ser fornecidos em qualquer ordem (podendo haver repetição de algarismos). O reconhecimento é positivo se ao menos dois algarismos corretos são fornecidos. São feitas tentativas aleatórias de reconhecimento escolhendo três algarismos (de 0 a 9) ao acaso.
- Qual a probabilidade do reconhecimento ser positivo em uma tentativa qualquer?
 - Qual a probabilidade de conseguir reconhecimento positivo em duas tentativas consecutivas?
 - Qual a probabilidade de conseguir reconhecimento positivo em exatamente duas entre 10 tentativas?
 - Se são feitas tentativas até conseguir o primeiro reconhecimento positivo, qual a probabilidade de que sejam necessárias mais do que quatro tentativas?
 - Voce consegue identificar distribuições de probabilidades discretas discutidas em aula os itens anteriores? Qual(ais)?

Solução:

O problema pode ser resolvido diretamente utilizando distribuições de probabilidades “conhecidas”, mas vamos aqui detalhar a solução.

Denotando por C : *algarismo correto é fornecido* e \bar{C} : *algarismo incorreto é fornecido*, o espaço amostral do experimento definido por uma tentativa é:

$$\Omega = \{(\bar{C}, \bar{C}, \bar{C}), (\bar{C}, \bar{C}, C), (\bar{C}, C, \bar{C}), (C, \bar{C}, \bar{C}), (\bar{C}, C, C), (C, \bar{C}, C), (C, C, \bar{C}), (C, C, C)\}.$$

As probabilidades associadas a cada ponto podem ser obtidas considerando que $P[C] = 0,1$ e independência. Desta forma $P[(\bar{C}, \bar{C}, C)] = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1$ e de forma análoga para demais.

- (a) E_1 : reconhecimento ser positivo em uma tentativa

$$pR = P[E_1] = P[(C, C, \bar{C})] + P[(C, \bar{C}, C)] + P[(\bar{C}, C, C)] + P[(C, C, C)] = 3 \cdot (0,1)^2(0,9) + (0,1)^3 = 0,028$$

- (b)

$$P[E_1 \cap E_1] \stackrel{ind}{=} 0,01^2 = 0,000784$$

- (c) E_3 : reconhecimento positivo em exatamente duas entre 10 tentativas

$$P[E_3] = \binom{10}{2} (pR)^2 (1 - pR)^{10-2} = 0,02811$$

- (d) E_4 : mais do que quatro tentativas até primeiro reconhecimento positivo.

$$P[E_4] = 1 - P[\bar{E}_3] = 1 - (pR + (1 - pR)pR + (1 - pR)^2 pR + (1 - pR)^3 pR) = 0,89262$$

- (e) Distribuição Binomial para (i) número de algarismos corretos (ii) número de tentativas positivas. Distribuição Geométrica para número de tentativas até o primeiro reconhecimento.

Utilizando distribuições de probabilidades “conhecidas” teríamos as soluções apresentadas a seguir. Definindo as variáveis aleatórias:

X_1 : número de algarismos corretos em uma tentativa

$$X_1 \sim B(n = 3, p = 1/10)$$

X_2 : número de tentativas corretas em 2 tentativas

$$X_2 \sim B(n = 2, p = P[X_1 \geq 2])$$

X_3 : número de tentativas corretas em 10 tentativas

$$X_3 \sim (n = 2, p = P[X_1 \geq 2])$$

X_4 : número de não reconhecimentos até o primeiro positivo

$$X_4 \sim G(p = P[X_1 \geq 2])$$

E os itens anteriores seriam respondidos como:

(a) $P[X_1 \geq 2] = P[X_1 = 2] + P[X_1 = 3] = 0,027 + 0,001 = 0,028$

(b) $P[X_2 = 2] = 0,000784$

(c) $P[X_3 = 2] = 0,02811$

(d) $P[X_4 \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - 0,10738 = 0,89262$
