CE-003: Estatística II - Turma AMB/K/O
Avaliações Semanais (1^o semestre 2014)

Semana 3

1. Dois jogadores (A e B) vão jogar um jogo que consiste no lançamento de dois dados. Ambos começam com R$ 10,00. Se a soma dos dados for um número ímpar, A paga R$ 1,00 para B. Se a soma for par, B paga R$ 1,00 para A.
   (a) Quais os possíveis valores em dinheiro que os jogadores podem ter após 2 rodadas? A chance é a mesma para todos esses possíveis valores?
   (b) Quais os possíveis valores em dinheiro que os jogadores podem ter após 3 rodadas? A chance é a mesma para todos esses possíveis valores?
   (c) O jogo é honesto?

Solução:
No lançamento de dos dados exixtem 36 resultados possíveis $((1,1),(1,2),\dots,(6,6))$ todos com a mesma probabilidade de ocorrência. As possíveis somas e respectivas probabilidades são:

S(soma)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P[S=s]$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

O que resulta nas probabilidades de par e ímpar:

S(soma)	par	ímpar
$P[S=s]$	$\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$	$\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

(a) Denotanto por A e B as vitórias de cada um destes jogadores os possíveis resultados são:

$$\Omega = (A,A),(A,B),(B,A),(B,B)$$

e como $P[A] = P[par] = P[\text{ímpar}] = P[B] = 1/2$, cada um dos possíveis resultados em Ω possui probabilidade 1/2. Denotando por X_A o saldo de A após duas rodadas (lembrando que $X_B = 20 - X_A$), temos que os possíveis valores e suas probabilidades após duas rodadas são:

x_A	8	10	12
$P[X_A = x_A]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(b) De forma análoga à anterior, os possíveis resultados são:

$$\Omega = (A,A,A),(A,A,B),(A,B,A),(B,A,A),(A,B,B),(B,A,B),(B,B,A),(B,B,B)$$

e cada ponto do espeço amostral possui probabilidade 1/8. Os possíveis valores de X_A e suas probabilidades após duas rodadas são:

x_A	7	9	11	13
$P[X_A = x_A]$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(c) Sim, a probabilidade de *par* é igual a de *mpar* o que resultou em probabilidades iguais para os ganhos possíveis dos jogadores.

As probabilidades poderiam ser ainda obtidas definindo-se:

$$
\begin{aligned}
&Y_B \text{número de vitórias de B}\\
&y_B \in \{0,1,2,3\}\\
&Y_B \sim \text{Bin}(n, p = 1/2) \qquad \text{em que } n = 2 \text{ ou } 3 \text{ é o número de rodadas}\\
P[Y_B = y_B] = &\binom{n}{y_B} p^{y_B}(1-p)^{n-y_B}
\end{aligned}
$$

---

2. A cada rodada de um experimento sobre funções cognitivas, o animal recebe um estímulo e depois faz uma escolha entre duas opções, sendo que em uma deles ele recebe um "prêmio" e em outra não. O interesse está no resultados dos "acertos" do animal (ou seja se ele recebe ou não o "prêmio"). Considere três rodadas deste experimento.
   (a) Qual o espaço amostral do experimento?
   (b) Qual a probabilidade associada a cada ponto do espaço amostral?
   (c) Qual(ais) as suposições feitas para calcular estas probabilidades?
   (d) Qual a probabilidade do animal receber algum "prêmio" durante as três rodadas?
   (e) Defina algum evento simples e algum evento composto e forneça as probabilidades destes eventos.

Solução:
Notação:

$$A: \text{o animal recebe o prêmio} \quad P[A] = 0,50 \quad P[\overline{A}] = 0,50$$

(a) $\Omega = \{(A,A,A),(A,A,\overline{A}),(A,\overline{A},A),(\overline{A},A,A),(A,\overline{A},\overline{A}),(\overline{A},A,\overline{A}),(\overline{A},\overline{A},A),(\overline{A},\overline{A},\overline{A})\}$
(b) todos tem a mesma probabilidade, $P[(A,A,A)] = P[(A,A,\overline{A})] = \ldots = P[(\overline{A},\overline{A},\overline{A})] = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$
(c) Os resultados das três rodadas são independentes, a probabilidade de prêmio permanece constnate e igual a 1/2 em cada rodada.
(d) $P[\text{algum prêmio}] = 1 - P[\text{nenhum prêmio}] = 1 - P[(\overline{A},\overline{A},\overline{A})] = 1 - 1/8 = 7/8$
(e) Há várias possibilidades, o que se seguem são apenas possíveis opções:

$$
\begin{aligned}
&\text{E}_1(\text{evento simples}): \text{o animal recebe prêmio em todas as tentativas}\\
&\qquad P[\text{E}_1] = \frac{1}{8}\\
&\text{E}_2(\text{evento simples}): \text{o animal recebe prêmio em duas tentativas}\\
&\qquad P[\text{E}_2] = P[(A,A,\overline{A})] + P[(A,\overline{A},A)] + P[(\overline{A},A,A)] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

Semana 4

1. Considere que um componente de um sistema de reconhecimento é composto de um código de três algarismos que podem ser fornecidos em qualquer ordem. O reconhecimento é positivo se ao menos dois algarismos corretos são fornecidos. Considere que são feitas tentativas aleatórias, sendo que cada tentativa consiste em fornecer três algarismos (de 0 a 9).
   (a) Qual a probabilidade do reconhecimento ser positivo em uma tentativa qualquer?
   (b) Qual a probabilidade de conseguir reconhecimento positivo em duas tentativas consecutivas?
   (c) Qual a probabilidade de conseguir reconhecimento positivo em exatamente duas entre 10 tentativas?
   (d) Se são feitas tentativas até conseguir o primeiro reconhecimento positivo, qual a probabilidade de que sejam necessárias mais do que quatro tentativas?
   (e) Voce consegue identificar distribuições de probabilidades discretas discutidas em aula os itens anteriores? Qual(ais)?

Solução:
O problema pode ser resolvido diretamente utilizando distribuições de probabilidades "conhecidas", mas vamos aqui detalhar a solução.
Denotando por C: *algarismo correto é fornecido* e $\bar{C}$: *algarismo incorreto é fornecido*, o espaço amostral do experimento definido por uma tentativa é:

$$\Omega = \{(\bar{C},\bar{C},\bar{C}),(\bar{C},\bar{C},C),(\bar{C},C,\bar{C}),(C,\bar{C},\bar{C}),(\bar{C},C,C),(C,\bar{C},C),(C,C,\bar{C}),(C,C,C)\}.$$

As probabilidades associadas a cada ponto podem ser obtidas considerando que $P[C] = 0,1$ e independência. Desta forma $P[(\bar{C},\bar{C},C)] = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1$ e de forma análoga para demais.

(a) E_1 : reconhecimento ser positivo em uma tentativa

$$pR = P[E_1] = P[(C,C,\bar{C})]+P[(C,\bar{C},C)]+P[(\bar{C},C,C)]+P[(C,C,C)] = 3\cdot(0,1)^2(0,9)+(0,1)^3 = 0.028$$

(b)

$$P[E_1 \cap E_1] \overset{ind}{=} 0.01^2 = 0.000784$$

(c) E_3: reconhecimento positivo em exatamente duas entre 10 tentativas

$$P[E_3] = \binom{10}{2}(pR)^2(1-pR)^{10-2} = 0.02811$$

(d) E_4: mais do que quatro tentativas até primeiro reconhecimento positivo.

$$P[E_3] = 1 - P[\bar{E}_3] = 1 - (pR + (1-pR)pR + (1-pR)^2pR + (1-pR)^3pR) = 0.89262$$

(e) Distribuição Binomial para (i) número de algarismos corretos (ii) número de tentativas positivas. Distribuição Geomérica para número de tentativas até o primeiro reconhecimento.

Utilizando distribuições de probabilidades "conhecidas" teríamos as soluções apresentadas a seguir. Definindo as variáveis aleatórias:

X_1 : número de algarísmos corretos em uma tentativa	$X_1 \sim \mathrm{B}(n=3, p=1/10)$
X_2 : número de tentativas corretas em 2 tentativas	$X_2 \sim \mathrm{B}(n=2, p=P[X_1 \geq 2])$
X_3 : número de tentativas corretas em 10 tentativas	$X_3 \sim \mathrm{B}(n=2, p=P[X_1 \geq 2])$
X_4 : número de não reconhecimentos até o primeiro positivo	$X_4 \sim \mathrm{G}(p=P[X_1 \geq 2)$

E os itens anteriores seriam respondidos como:

(a) $P[X_1 \geq 2] = P[X_1 = 2] + P[X_1 = 3] = 0.027 + 0.001 = 0.028$
(b) $P[X_2 = 2] = 0.000784$
(c) $P[X_3 = 2] = 0.02811$
(d) $P[X_4 \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - 0.10738 = 0.89262$

Semana 5

1. Considere um estudo de padrões em texto no qual a ocorrência de algumas "expressões chave" é verificada. Responda cada um dos itens abaixo, identificando a variável aleatória envolvida e a respectiva distribuição de probabilidades.
   (a) Sabe-se que uma certa expressão E_1 ocorre em média 1,4 vezes por página. Qual a probabilidade de tal expressão
      i. não ser encontrada em uma determinada página?
      ii. ocorrer ao menos três vezes em duas páginas?
   (b) Uma outra expressão E_2 ocorre em 10% das páginas. Qual a probabilidade de:
      i. não ser encontrada em cinco páginas escolhidas ao acaso?
      ii. ser encontrada em ao menos uma de cinco páginas escolhidas ao acaso?

(c) Adota-se a estratégia de inspecionar páginas uma a uma até encontrar a primeira ocorrência da expressão E_2.

  i. Quantas páginas sem a ocorrência de E_2 espera-se encontrar?
  ii. Qual a probabilidade de serem encontradas mais que cinco páginas sem a ocorrência de E_2

(d) Em um texto completo de 80 páginas sabe-se que 30 apresentam algum erro no uso de expressões investigadas e as demais páginas não apresentam nenhum erro.

  i. Sendo escolhidas dez páginas do texto ao acaso, qual a probabilidade de que nenhuma delas contenha erro no uso das expressões?
  ii. Idem anterior para 15 páginas de texto.

(e) As páginas do texto serão inspecionadas até que se encontre a terceira página com algum erro.

  i. Qual a probabilidade que de sejam "varridas" pelo menos dez páginas?
  ii. Quantas páginas espera-se inspecionar antes de encontrar a terceira com erro?
  iii. Qual seria a probabilidade "de algo oposto", de ser necessário varrer mais de cinco páginas até que se encontre a terceira sem erro algum?

Solução:

(a)

$$X : \text{número de ocorrências de } E_1 \text{ em uma página}$$
$$X \sim \mathrm{P}(\lambda = 1,4)$$
$$P[X = x] = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

  i. $P[X = 0] = \frac{\mathrm{e}^{-1,4}1,4^0}{0!} = 0.247$
  ii.

$$X : \text{número de ocorrências de } E_1 \text{ em duas página}$$
$$X \sim \mathrm{P}(\lambda = 2,8)$$
$$P[X \geq] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]) = 0.167$$

(b)

$$X : \text{número de páginas em que } E_2 \text{ ocorre dentre cinco páginas}$$
$$X \sim \mathrm{B}(n = 5, p = 0,10)$$
$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

  i. $P[X = 0] = \binom{5}{0}(0,1)^0(1-0,1)^{5-0} = 0.59$
  ii. $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 0.41$

(c)

$$X : \text{número de páginas insecionadas sem encontrar a ocorrência de } E_2\text{, antes de encontrar a primeira}$$
$$X \sim \mathrm{G}(p = 0,10)$$
$$P[X = x] = (1-p)^x p$$

  i. $E[X] = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0,1}{0,1} = 9$
  ii. $P[X > 5] = 1 - P[X \leq 5] = 0.531$

(d)

$$X : \text{número de página com erros em n páginas de texto verificadas}$$
$$X \sim \mathrm{HG}(N = 80, K = 30, n)$$
$$P[X = x] = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

i. $P[X=0|n=10] = \frac{\binom{30}{0}\binom{80-30}{10-0}}{\binom{80}{10}} = 0.00624$

ii. $P[X=0|n=15] = \frac{\binom{30}{0}\binom{80-30}{15-0}}{\binom{80}{15}} = 0.000339$

(e) As páginas do texto serão inspecionadas até que se encontre a terceira página com algum erro.

$$X : \text{número de páginas inspecionadas sem encontrar a ocorrência de } E_2\text{, antes de encontrar a terceira}$$
$$X \sim \text{BN}(r=3, p=0,10)$$

$$P[X=x] = \binom{x+r-1}{x} p^r (1-p)^x$$

i. $P[X+3 \geq 10] = P[X \geq 7] = 0.93$

ii. $E[X] = \frac{r(1-p)}{p} = \frac{3(1-0,1)}{0,1} = 27$

iii.

$$X : \text{número de páginas inspecionadas com encontrar a ocorrência de } E_2\text{, antes de encontrar a terc}$$
$$X \sim \text{BN}(r=3, p=0,90)$$
$$P[X>5] = 1 - P[X \leq 4] = 0.000176$$

Semana 6

1. Considera-se que o número semanal de acidentes em uma certa rodovia segue uma distribuição de Poisson com média de 4,2.
   (a) Qual a probabilidade de que em uma determinada semana ocorram menos que três acidentes?
   (b) Indique como seria calculada a probabilidade de ocorrência de 10 ou mais acidentes.
   (c) Qual a probabilidade de que não ocorra acidentes em um único dia tomado ao acaso?
   (d) Qual seria a distribuição de probabilidades do número de acidentes por mês?
   (e) Qual a probabilidade de que, em quatro semanas, no máximo em uma delas ocorram três ou mais acidentes?

Solução:

$$X : \text{número semanal de acidentes}$$
$$X \sim \text{P}(\lambda = 4,2)$$
$$P[X=x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-4,2}4,2^x}{x!}$$

(a) $P[X \leq 3] = P[X=0] + P[X=1] + P[X=2] = 0.21$

(b) $P[X \geq 10] = 1 - P[X \leq 9] = 1 - (P[X=0] + P[X=1] + \ldots + P[X=9]) = 0.0111$

(c)

$$X_D : \text{número acidentes em 1 dia}$$
$$X_D \sim \text{P}(\lambda = 4,2/7)$$
$$P[X_D = 0] = \frac{e^{-4,2/7}(4,2/7)^0}{0!} = e^{-4,2/7} = 0.549$$

(d) Considerando o mês com 30 dias:

$$X_M : \text{número acidentes por mês}$$
$$X_M \sim \text{P}(\lambda = 30 \cdot 4,2/7 = 18)$$

(e)

$$Y: \text{número semanas, dentre 4 semanas, em que ocorrem 3 ou mais acidentes}$$
$$Y \sim \mathrm{B}(n=4, p=P[X \geq 3] = 0.79$$
$$P[Y=y] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-y} = \binom{4}{x} 0.79^x (1-0.79)^{4-y} P[Y \leq 1] = P[Y=0] + P[Y=1] = 0.0313$$

---

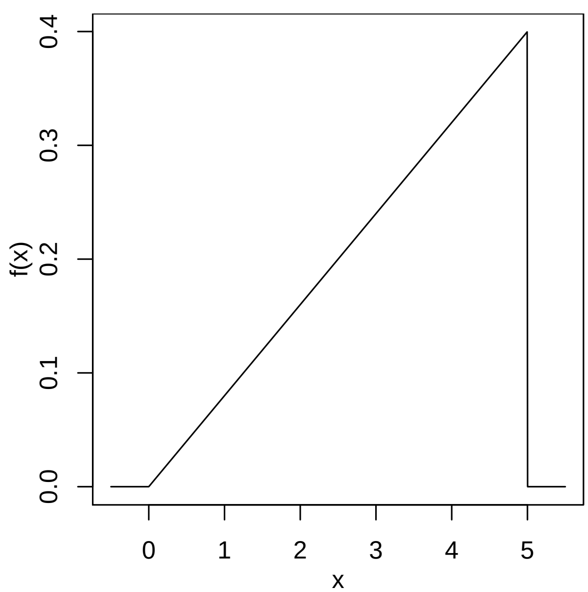
2. A função de densidade de probabilidades de uma variável aleatória X é dada por:

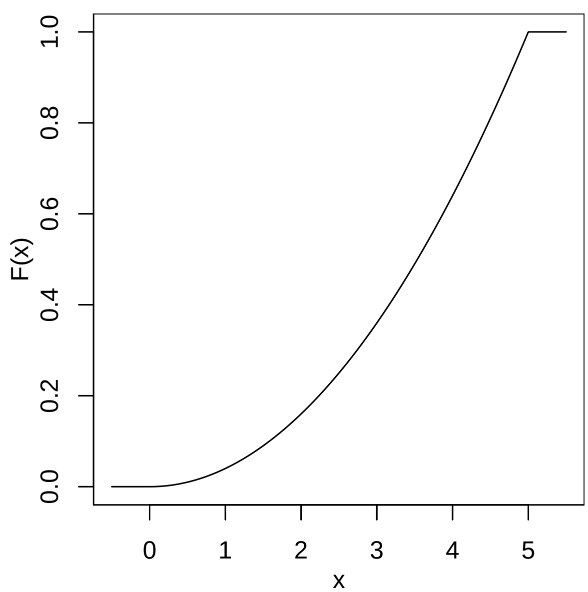
$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$$

encontre:

(a) k,
(b) $P[1 \leq X \leq 3]$,
(c) $P[2 \leq X \leq 4]$,
(d) $P[X \geq 3]$,
(e) $P[X \leq 3|X > 1]$,
(f) A expressão da função de densidade acumulada $F(x)$ e mostre como as probabilidades dos itens anteriores poderiam ser calculadas em função de $F(x)$,
(g) a média da variável X,
(h) os quartis (incluindo a mediana).

Solução:





(a)

$$Kx \geq 0, 0 \leq x \leq 5 \Rightarrow K > 0$$
$$\int_0^5 kx \mathrm{d}x = 1 \Rightarrow k\frac{5^2 - 0^2}{2} = 1 \Rightarrow K = 2/25 = 0,08$$

(b) $P[1 \leq X \leq 3] = \int_1^3 0,08x\mathrm{d}x = 0,08\frac{3^2-1^2}{2} = 0.32$

(c) $P[2 \leq X \leq 4] = \int_2^4 0,08x\mathrm{d}x = 0,08\frac{4^2-2^2}{2} = 0.48$

(d) $P[X \geq 3] = \int_3^5 0,08x\mathrm{d}x = 0,08\frac{5^2-3^2}{2} = 0.64$

(e) $P[X \leq 3|X > 1] = \frac{P[1<X\leq 3]}{P[X>1]} = \frac{\int_1^3 0,08x\mathrm{d}x}{\int_1^5 0,08x\mathrm{d}x} = \frac{0,08\frac{3^2-1^2}{2}}{0,08\frac{5^2-1^2}{2}} = 0.333$

(f)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x 0,08x\mathrm{d}x = 0,08\frac{x^2-0^2}{2} = 0,04x^2 & 0 \le x \le 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

$$P[1 \le X \le 3] = F(3) - F(1) = 0,04(3^2 - 1^2) = 0.32$$
$$P[2 \le X \le 4] = F(4) - F(2) = 0,04(4^2 - 2^2) = 0.48$$
$$P[X \ge 3] = 1 - F(3) = 1 - 0,04(3^2) = 0.64$$
$$P[X \le 3|X > 1] = \frac{F(3) - F(1)}{1 - F(1)} = \frac{0,04(3^2 - 1^2)}{1 - 0,04(3^2)} = 0.333$$

(g) $E[X] = \int xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^5 x0,08x\mathrm{d}x = 0,08\frac{5^3-0^3}{3} = 10/3 = 3,33$

(h)

$$M_d[X] : \int_0^{M_d} f(x)\mathrm{d} = 0,5 \Rightarrow M_d[X] = F^{-1}(0,5) = \sqrt{0,04/0,5} = 0.283$$
$$Q_1[X] : \int_0^{Q_1} f(x)\mathrm{d} = 0,25 \Rightarrow Q_1[x] = F^{-1}(0,25) = \sqrt{0,04/0,25} = 0.4$$
$$Q_3[X] : \int_0^{Q_3} f(x)\mathrm{d} = 0,75 \Rightarrow Q_3[x] = F^{-1}(0,75) = \sqrt{0,04/0,75} = 0.231$$