

"A educação é o eixo da nossa política de responsabilidade social."



Emilio Botín, presidente do Grupo Santander

Se  $\sigma^2$  desconhecido, podemos calcular o IC para  $\mu$  e testar hipóteses em relação a  $\mu$  considerando a estatística

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

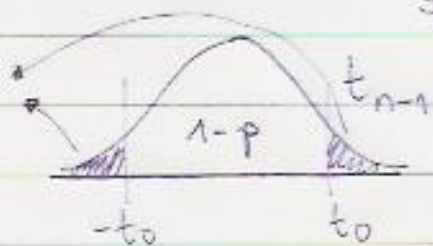
pág 348

Para testarmos

$$H_0: \mu = \mu_0 \times H_1: \mu \neq \mu_0$$

- Colhermos uma amostra de tamanho  $n$
- calculamos  $\bar{x}_0, s_0^2$  e  $t_0 = \frac{\bar{x}_0 - \mu_0}{s_0/\sqrt{n}}$

$$- P(T \geq |t_0|) = p$$

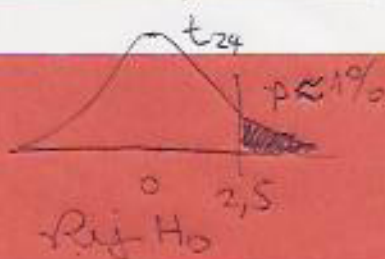


Ex 12.10: pag 349

$$n=25 \quad \bar{x}_0=31,5 \quad s_0=3$$

$$t_0 = \frac{31,5 - 30}{3/\sqrt{25}} = 2,5$$

$$H_0: \mu = 30 \times H_1: \mu > 30$$



"A educação é o eixo da nossa política de responsabilidade social."

7

Emilio Botín, presidente do Grupo Santander

Para a construção de intervalos de confiança partimos da expressão

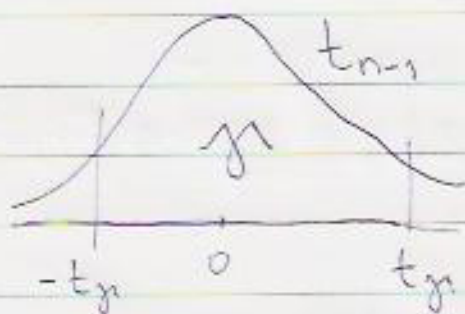
$$P\left(-t_{\alpha} < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha}\right) = \gamma$$

$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

∴

$$IC(\mu; \gamma) = \left(\bar{X} \pm t_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

↑  
muito parecido com o da variância conhecida



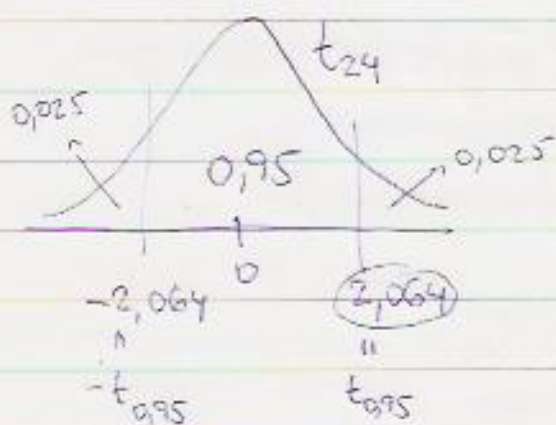
"A educação é o eixo da nossa política de responsabilidade social."

8

Emilio Botin, presidente do Grupo Santander

EX 12.10 : pag 349/350

$$\begin{aligned} \text{IC}(\mu; 0,95) &= \left( 31,5 \pm t_{0,95} \frac{3}{\sqrt{25}} \right) \\ &= (30,26 ; 32,74) \end{aligned}$$



"A educação é o eixo da nossa política de responsabilidade social."

9

~~Presidente do Grupo Santander~~, presidente do Grupo Santander

Exemplo 12.8: pag 345

$X$ : peso de cada pacote

$$X \sim N(500g, 100g^2)$$

Amostra de 16 pacotes  $\rightarrow s^2 = 169g^2$

A máquina está desregulada com relação à variância?

Podemos proceder o seguinte teste:

$$H_0: \sigma^2 = 100 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 \neq 100 = \sigma_0^2$$

Para <sup>auxiliar a</sup> tomada de decisão precisamos saber qual a força de evidência nos dados da amostra contra  $H_0$ , ou seja, se  $H_0$  for verdadeira

$$P(S^2 > 169) = ?$$

"A educação é o eixo da nossa política de responsabilidade social."

10

Emilio Botín, presidente do Grupo Santander

Distribuição amostral de  $S^2$

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Exemplo: Considere a população  
 $\{1, 3, 5, 5, 7\}$

$$\mu = 4,2$$

$$\sigma^2 = 4,16$$

Tomando amostras de tamanho 3  
 $n=3$  podemos construir a distribuição amostral de  $S^2$

[pag 277]

TABELA 10.6:

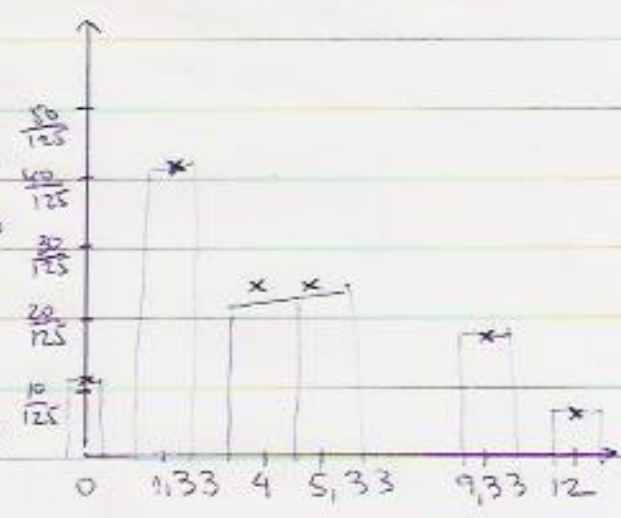
"A educação é o eixo da nossa política de responsabilidade social."



Emilio Botín, presidente do Grupo Santander

Tipo de Amostra	Prob.	$S^2$	$s^2$	$P(S^2 = s^2)$
111	1/125	0	0	1/125
113	3/125	4/3	1,33	42/125
115	6/125	16/3	4	24/125
117	3/125	12	5,33	24/125
133	3/125	4/3	9,33	18/125
135	12/125	4	12,0	6/125
137	6/125	28/3		
155	12/125	16/3		
157	12/125	28/3		
<del>177</del>	<del>3/125</del>	<del>12</del>		
<del>222</del>	<del>1/125</del>	<del>0</del>		
<del>223</del>	<del>6/125</del>	<del>4/3</del>		
<del>224</del>	<del>3/125</del>	<del>16/3</del>		
<del>225</del>	<del>12/125</del>	<del>4/3</del>		
<del>226</del>	<del>12/125</del>	<del>4</del>		
<del>227</del>	<del>3/125</del>	<del>16/3</del>		
<del>228</del>	<del>8/125</del>	<del>0</del>		
<del>229</del>	<del>12/125</del>	<del>4/3</del>		
<del>230</del>	<del>6/125</del>	<del>4/3</del>		
<del>231</del>	<del>1/125</del>	<del>0</del>		
777	1/125	0		
TOTAL	1			

$E(S^2) = 4,16 = \sigma^2$   
 $Var(S^2) = 11,28$



Não é normal

"A educação é o eixo da nossa política de responsabilidade social."



Emilio Botin, presidente do Grupo Santander

Suposições:

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \quad i=1, \dots, n$$

$X_i$  independentes

Resultado:

Sob  $H_0$ ,

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$$

em que

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

"A educação é o eixo da nossa política de responsabilidade social."



Emilio Botín, presidente do Grupo Santander

Prova: Se  $H_0$  verd.  $\sigma^2 = \sigma_0^2$  e

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)}{\sigma^2} \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$
$$= \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$$

$$= \left\langle \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} = \frac{X_i - \mu + \mu - \bar{X}}{\sigma} = \underbrace{\frac{X_i - \mu}{\sigma}}_{z_i} - \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}}_{\bar{z}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{array}{l} \bar{z} \sim N(0, 1/n) \\ z_i \sim N(0, 1) \end{array} \right\rangle$$

Pelo Teorema 12.1 pag. 395

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$$



"A educação é o eixo da nossa política de responsabilidade social."



Emilio Botin, presidente do Grupo Santander

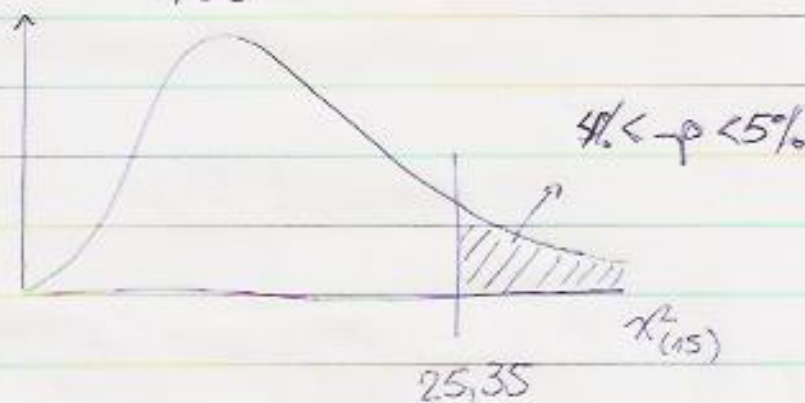
Voltando ao Ex 12.8:

$$H_0: \sigma^2 = 100$$

$$H_1: \sigma^2 \neq 100$$

Para  $n=16$ ,  $S_0^2 = 169$ , e sob  $H_0: \sigma^2 = 100$  o valor observado da estatística é:

$$\chi^2_0 = \frac{(15)(169)}{100} = 25,35$$



Sob  $H_0$ :

$$P(S^2 > 169) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{(n-1)169}{\sigma^2}\right) =$$

$$= P\left(\chi^2 > \frac{15 \times 169}{100}\right) \approx 0,045$$

25,35

Em 4,5% das vezes que repetir este experimento espera-se observar variância amostral acima de 169 quando  $\sigma^2 = 100$ .

"A educação é o eixo da nossa política de responsabilidade social."

13



Emilio Botin, presidente do Grupo Santander

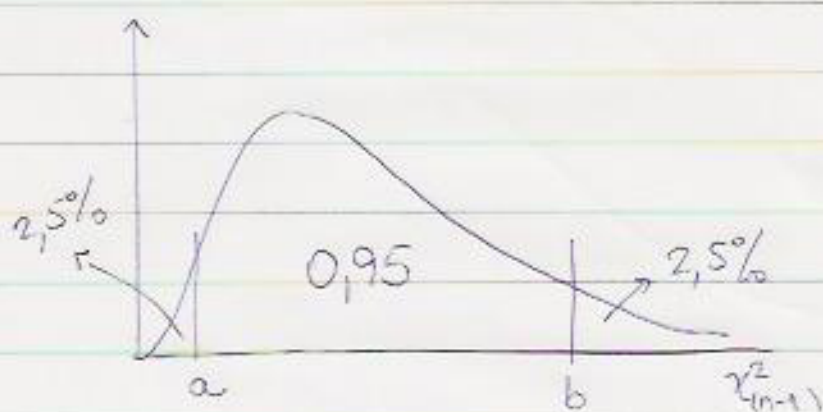
A construção do IC <sup>de</sup> para  $\sigma^2$  é feita a partir da expressão

$$P\left(\cancel{a} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b\right) = 0,95$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{a}\right) = 0,95$$

↑  
LI

↑  
LS



Voltando ao Ex 12.8:  $a = 6,262$   $b = 27,488$

$$\begin{aligned} IC(\sigma^2; 0,95) &= \left( \frac{(15)(169)}{27,488} ; \frac{(15)(169)}{6,262} \right) \\ &= (92,22 ; 404,82) \end{aligned}$$

"A educação é o eixo da nossa política de responsabilidade social."

16

Emilio Botín, presidente do Grupo Santander

Exercícios recomendados:

Pag. 334: 6, 7, 8, 9

Pag. 343: 16, 17

Pag. 347: 18, 19, 20

Pag. 350: 22, 24

Pag. 351: 25 ao 43



Santander

UNIVERSIDADES