CE-003: Estatística II - Turma K/O
Avaliações Semanais (1^o semestre 2015)

Semana 3 (av-01)

1. Considere um jogo com um baralho (52 cartas) no qual em uma primeira rodada retira-se duas cartas e em uma segunda rodada retira-se uma carta. O interesse é se as cartas são figuras (valete, dama ou rei) de qualquer naipe. Temos interesse em:
   - obter o espaço amostral;
   - obter a probabilidade de cada ponto amostral;
   - obter a distribuição de probabilidades do número de figuras obtidas nas três cartas.

   Deve-se considerar duas situações, com e sem reposição das cartas entre a primeira e a segunda rodada.

   Solução:
   Notação:

$$F : \text{a carta é uma figura}$$
$$N = \overline{F} : \text{a carta não é uma figura}$$

- O espaço amostral para as duas situações (com e sem reposição) é o mesmo.

$$\Omega = \{(FF,F);(FF,N);(FN,F);(NF,F);(FN,N);(NF,N);(NN,F);(NN,N)\}$$

- Já as probabilidades são afetadas por repor ou não as cartas

Ponto amostral	(FF,F)	(FF,N)	(FN,F)	(NF,F)	(FN,N)	(NF,N)	(NN,F)	(NN,N)
Com reposição	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{12}{52}$	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{40}{52}$	$\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{12}{52}$	$\frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{12}{52}$	$\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{40}{52}$	$\frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{40}{52}$	$\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{12}{52}$	$\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{40}{52}$
Sem reposição	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{10}{50}$	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{40}{50}$	$\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{11}{50}$	$\frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{11}{50}$	$\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{39}{50}$	$\frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{39}{50}$	$\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{12}{50}$	$\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{38}{50}$

-

$$X : \text{número de figuras obtidas nas três cartas}$$
$$x \in \{0,1,2,3\}$$

Com reposição

x	0	1	2	3
P[X=x]	P[(NN,N)]	P[(FN,N)] + P[(NF,N)] + P[(NN,F)]	P[(FF,N)] + P[(FN,F)] + P[(NF,F)]	P[(FFF)]
	$\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{40}{52}$	$\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{40}{52}+\frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{40}{52}+\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{12}{52}$	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{40}{52}+\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{12}{52}+\frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{12}{52}$	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{12}{52}$

Sem reposição

x	0	1	2	3
P[X=x]	P[(NN,N)]	P[(FN,N)] + P[(NF,N)] + P[(NN,F)]	P[(FF,N)] + P[(FN,F)] + P[(NF,F)]	P[(FFF)]
	$\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{38}{50}$	$\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{39}{50}+\frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{39}{50}+\frac{40}{52}\frac{39}{51}\frac{12}{50}$	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{40}{50}+\frac{12}{52}\frac{40}{51}\frac{11}{50}+\frac{40}{52}\frac{12}{51}\frac{11}{50}$	$\frac{12}{52}\frac{11}{51}\frac{10}{50}$
	0.4471	0.4235	0.1195	0.009955

OBS: no caso sem reposição a v.a. X segue uma distribuição hipergeométrica e as probabilidades podem ser obtidas pela função de probabilidade desta distribuição.

$$X \sim \text{HG}(N = 52, n = 3, k = 12)$$
$$P[X = x] \sim \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$
$$P[X = 0] = \frac{\binom{12}{0}\binom{52-12}{3-0}}{\binom{52}{3}} = 0.4471$$
$$P[X = 1] = \frac{\binom{12}{1}\binom{52-12}{3-1}}{\binom{52}{3}} = 0.4235$$
$$P[X = 2] = \frac{\binom{12}{2}\binom{52-12}{3-2}}{\binom{52}{3}} = 0.1195$$
$$P[X = 3] = \frac{\binom{12}{3}\binom{52-12}{3-3}}{\binom{52}{3}} = 0.009955$$

Semana 4 (av-02)

1. Considere que indivíduos vão fazer um teste online no qual questões serão apresentadas sequencialmente ao candidato. Calcule a probabilidade pedidas nos contextos de cada um dos itens a seguir. Procure identificar: a variável aleatória em questão e sua distribuição de probabilidades.
   (a) Suponha que oito (8) questões são retiradas com reposição (ou seja uma mesma questão pode ser retirada mais de uma vez) de um *banco* de 40 questões dos quais o candidato sabe responder a 25 delas. Qual a probabilidade de acertar três ou mais questões?
   (b) Idem anterior porém supondo agora que as questões não podem se repetir.
   (c) Supondo novamente reposição das questões, o candidato responde até errar pela primeira vez. Qual a probabilidade de acertar pelo menos três questões?
   (d) Idem anterior supondo que responde até errar pela terceira vez.

Solução:

(a)

$$X : \text{número de questões certas entre oito questões selecionadas ao acaso (com repetição)}$$
$$X \sim \text{B}(n = 8, p = 25/40)$$
$$x \in \{0, 1, 2, \ldots 8\}$$
$$P[X \geq 3] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] = 0.964$$

(b)

$$X : \text{número de questões certas entre oito questões selecionadas ao acaso (sem repetição)}$$
$$X \sim \text{HG}(N = 40, K = 25, n = 8)$$
$$x \in \{0, 1, 2, \ldots 8\}$$
$$P[X \geq 3] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] = 0.9783$$

(c)

$$X : \text{número de acertos até o primeiro erro}$$
$$X \sim \text{G}(p = 15/50)$$
$$x \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$P[X \geq 3] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] = 0.2441$$

(d)

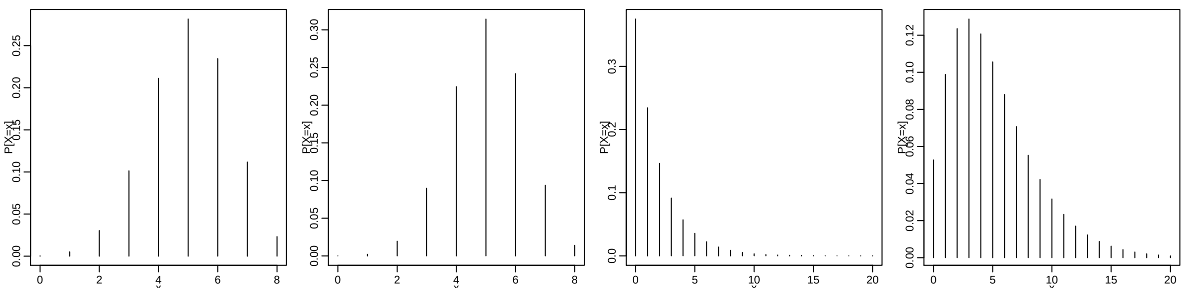
$$X : \text{número de acertos até o terceiro erro}$$
$$X \sim \text{BN}(k = 3, p = 15/40)$$
$$x \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$P[X \geq 3] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] = 0.7248$$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> (q1 <- pbinom(2, size=8, prob=25/40, lower=FALSE))
[1] 0.964
> (q2 <- phyper(2, m=25, n=15, k=8, lower=FALSE))
[1] 0.9783
> (q3 <- pgeom(2, prob=15/40, lower=FALSE))
[1] 0.2441
> (q4 <- pnbinom(2, size=3, prob=15/40, lower=FALSE))
[1] 0.7248
```

Gráficos das distribuições de probabilidades.

```
> par(mfrow=c(1,4))
> par(mar=c(3,3,0.2, 0.2), mgp=c(1.2, 0.6, 0))
> plot(0:8, dbinom(0:8, size=8, prob=25/40), xlab="x", ylab="P[X=x]", type="h")
> plot(0:8, dhyper(0:8, m=25, n=15, k=8), xlab="x", ylab="P[X=x]", type="h")
> plot(0:20, dgeom(0:20, prob=15/40), xlab="x", ylab="P[X=x]", type="h")
> plot(0:20, dnbinom(0:20, size=3, prob=15/40), xlab="x", ylab="P[X=x]", type="h")
```



2. Um vendedor consegue vender, em média, 0,5 unidades de um produto por dia. Calcule as probabilidades de:
   (a) vender alguma unidade em um particular dia;
   (b) não efetuar nenhuma venda em uma semana (considere a semana tendo cinco dias úteis);
   (c) em uma semana (cinco dias úteis) efetuar vendas em ao menos três dias.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} X_1 &: \text{número de vendas em um dia} \\ x_1 &\in \{0,1,2,\ldots\} \\ X_1 &\sim \mathrm{P}(\lambda = 0,5) \\ P[X_1 = 0] &= \frac{\mathrm{e}^{0,5} 0,5^0}{0!} = 0.3935 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} X_2 &: \text{número de vendas em uma semana (cinco dias)} \\ x_2 &\in \{0,1,2,\ldots\} \\ X_2 &\sim \mathrm{P}(\lambda = 2,5) \\ P[X_2 = 0] &= \frac{\mathrm{e}^{2,5} 2,5^0}{0!} = 0.08208 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} X_3 &: \text{número de dias com vendas em uma semana (cinco dias)} \\ x_3 &\in \{0,1,2,3,4,5\} \\ X_3 &\sim \mathrm{B}(n = 5, p = P[X_1 = 0] \\ P[X_3 \geq 3] &= P[X_3 = 3] + P[X_3 = 4] + P[X_3 = 5] = 0.6938 \end{aligned}$$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> (q1 <- ppois(0, lambda=0.5, lower=FALSE))
[1] 0.3935
> (q2 <- ppois(0, lambda=0.5*5))
[1] 0.08208
> (q3 <- pbinom(2, size=5, prob=dpois(0, lambda=0.5), lower=FALSE))
[1] 0.6938
```

---

3. Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2/8 & 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade válida.
(b) Obtenha $P[0,5 < X < 1,5]$.
(c) Obtenha $P[X > 1,2]$.
(d) Obtenha $P[X > 1,2|X > 0,5]$.
(e) Obtenha o valor experado de X.

Solução:

(a)

$$\text{Mostrar que: } f(x) \geq 0\ \forall x \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\frac{3}{8}\frac{2^3 - 0^3}{3} = 1$$

$$\text{a função acumulada } F(x) \text{ é dada por:} F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\frac{x^3 - 0^3}{3} = \frac{x^3}{8}$$

(b) $P[0,5 < X < 1,5] = \int_{0,5}^{1,5} f(x)\mathrm{d}x = F(1,5) - F(0,5) = 0.406$

(c) $P[X > 1,2] = \int_{1,2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(1,2) = 0.784$

(d) $P[X > 1,2|X > 0,5] = \frac{\int_{1,2}^{2} f(x)\mathrm{d}x}{\int_{0,5}^{2} f(x)\mathrm{d}x} = \frac{1-F(1,2)}{1-F(0,5)} = 0.796$

(e)

$$E[X] = \int_0^2 x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}[\frac{2^4 - 0^4}{4}] = \frac{3}{2} = 1,5$$

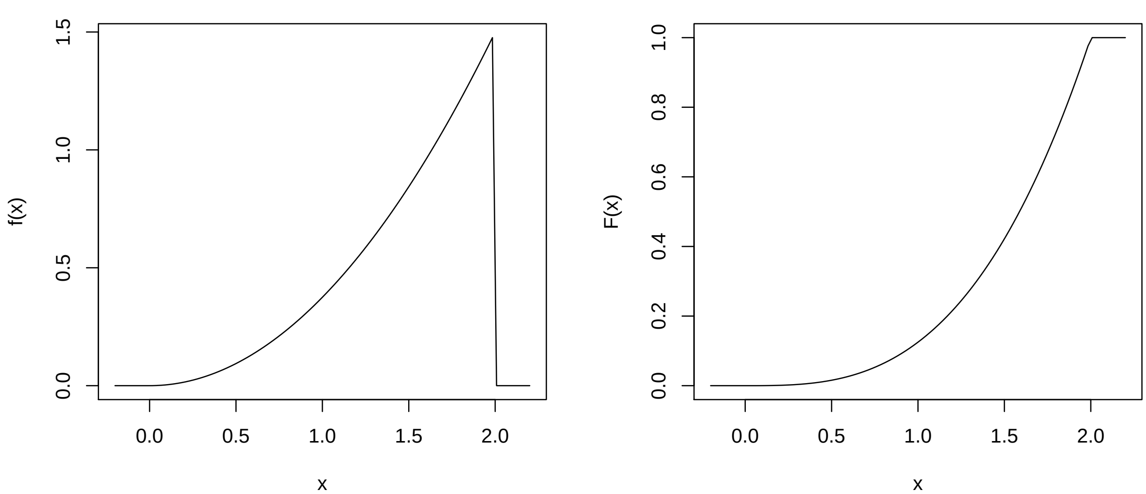


Figura 1: Função de densidade de probabilidade (esquerda) e função de distribuição (direita).

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> require(MASS)
> ## a)
> fx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 2, (3*x^2)/8, 0)
> integrate(fx, 0, 2)$value

[1] 1

> Fx <- function(x) ifelse(x>0, ifelse(x<=2, (x^3)/8,1), 0)
> Fx(2)

[1] 1

> ## b)
> integrate(fx, 0.5, 1.5)$value

[1] 0.4062

> Fx(1.5)-Fx(0.5)

[1] 0.4062

> ##c)
> integrate(fx, 1.2, 2)$value

[1] 0.784

> 1-Fx(1.2)

[1] 0.784

> ## d)
> integrate(fx, 1.2, 2)$value/integrate(fx, 0.5, 2)$value

[1] 0.7964

> (1-Fx(1.2))/(1-Fx(0.5))

[1] 0.7964

> ## e)
> efx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 2, x*(3*x^2)/8, 0)
> integrate(efx, 0, 2)$value

[1] 1.5
```
