

# CE-003: Estatística II - Turma K/O

## Avaliações Semanais (1º semestre 2016)

Semana 2 (av-01)

1. (adaptado de Bussab & Morettin) Três jogadores,  $A$ ,  $B$  e  $C$  disputam um torneio de tênis. Inicialmente  $A$  joga com  $B$  e o vencedor joga com  $C$ , e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes em seguida ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas.
  - (a) A sequência de jogos que determina o resultado final do torneio pode ser considerada um experimento aleatório? Justifique.
  - (b) Quais são os possíveis resultados?
  - (c) O torneio é "justo" em relação às chances de vitória dos jogadores mediante a regra proposta?

Considere agora que, sabendo-se dos resultados de resultados dos jogadores e suas classificações em *rankings* tem-se que  $A$  vence  $B$  com probabilidade de 0,72, vence  $C$  com probabilidade de 0,65 e  $B$  vence  $C$  com probabilidade de 0,38.

- (d) Qual a probabilidade de cada jogador ganhar o torneio?

**Solução:**

1o Jogo	Vencedor	2o Jogo	Vencedor	3o Jogo	Vencedor	4o Jogo	Vencedor	Campeão	Sequência*	Prob**
A x B	A	A x C	A	-	-	-	-	A	(AA)	1/4
	A	A x C	C	B x C	B	A x B	A	A	(ACBA)	1/16
	A	A x C	C	B x C	B	A x B	B	B	(ACBB)	1/16
	A	A x C	C	B x C	C	-	-	C	(ACC)	1/8
	B	B x C	B	-	-	-	-	B	(BB)	1/4
	B	B x C	C	A x C	A	A x B	A	A	(BCAA)	1/16
	B	B x C	C	A x C	C	A x B	B	B	(BCAB)	1/16
	B	B x C	C	A x C	C	-	-	C	(BCC)	1/8

\*Sequência : sequência de vencedores dos jogos torneio

\*\* Probabilidade supondo igualdade entre os competidores em cada jogo

- (a) Sim. (justificativas serão analisadas)
- (b)
 
$$\Omega = \{(AA), (ACBA), (ACBB), (ACC), (BB), (BCAA), (BCAB), (ACC)\}$$
- (c) O jogo não é honesto pois sob a hipótese de igualdade de condições em cada jogo os jogadores possuem diferentes chances de vencer o torneio.

Vencedor	A	B	C
Sequências	{(AA), (ACBA), (BCAA)}	{(ACBB), (BB), (BCAB)}	{(BCC), (ACC)}
Probabilidade	$(1/4) + (1/16) + (1/16) = 3/8$	$(1/16) + (1/4) + (1/16) = 3/8$	$(1/8) + (1/8) = 2/8$

- (d)

Campeão	Sequência	Probabilidade
A	(AA)	$0,72 \cdot 0,65 = 0.468$
A	(ACBA)	$0,72 \cdot 0,35 \cdot 0,38 \cdot 0,72 = 0.0689$
B	(ACBB)	$0,72 \cdot 0,35 \cdot 0,38 \cdot 0,28 = 0.0268$
B	(ACC)	$0,72 \cdot 0,35 \cdot 0,62 = 0.1562$
B	(BB)	$0,28 \cdot 0,38 = 0.1064$
A	(BCAA)	$0,28 \cdot 0,62 \cdot 0,65 \cdot 0,72 = 0.0812$
B	(BCAB)	$0,28 \cdot 0,62 \cdot 0,65 \cdot 0,28 = 0.0316$
C	(BCC)	$0,28 \cdot 0,62 \cdot 0,35 = 0.0608$

  

Vencedor	A	B	C
Sequências	{(AA), (ACBA), (BCAA)}	{(ACBB), (BB), (BCAB)}	{(BCC), (ACC)}
Probabilidade	0.6182	0.1648	0.217

1. Uma coleção de 100 programas de computador foi examinada para detectar erros de “*sintaxe*”, “*input/output*” e de “*outro tipo*” diferente dos anteriores. Desses 100 programas, 20 tinham erros de “*sintaxe*”, 10 tinham erros de “*input/output*” e 5 tinham erros de “*outro tipo*”, 6 tinham erros de “*sintaxe*” e de “*input/output*”, 3 tinham erros de “*sintaxe*” e de “*outro tipo*”, 3 tinham erros de “*input/output*” e de “*outro tipo*” e 2 tinham os três tipos de erros considerados. Um programa é seleccionado ao acaso desta coleção. Determine a probabilidade de que o programa seleccionado tenha:

- (a) Exclusivamente erros de “*sintaxe*”.  
 (b) Pelo menos um dos três tipos de erros

**Solução:**

Notação:

 $S$  : erro de sintaxe $I$  : erro de input/output $O$  : erro de outro tipo

Dados:

$$P[S] = 0,20 \quad ; \quad P[I] = 0,10 \quad ; \quad P[O] = 0,05$$

$$P[S \cap I] = 0,06 \quad ; \quad P[S \cap O] = 0,03 \quad ; \quad P[I \cap O] = 0,03$$

$$P[S \cap I \cap O] = 0,02$$

- (a)  $P[S] - P[(S \cap I) \cup (S \cap O)] = P[S] - \{P[(S \cap I) \cup (S \cap O)] - P[S \cap I \cap O]\} =$   
 $= 0,20 - 0,06 - 0,03 + 0,02 = 0,13$   
 (b)  $P[S \cup I \cup O] = P[S] + P[I] + P[O] - P[S \cap I] - P[S \cap O] - P[I \cap O] + P[S \cap I \cap O] =$   
 $= 0,20 + 0,10 + 0,05 - 0,06 - 0,03 - 0,03 + 0,02 = 0,25$

2. Suponha que 5% de uma população sofre de hipertensão e que, de entre estes, 75% ingerem bebidas alcoólicas. De entre os que não são hipertensos 50% ingerem bebidas alcoólicas. Suponha que um indivíduo é escolhido ao acaso da população.

- (a) Calcule a probabilidade de o indivíduo escolhido ingerir bebidas alcoólicas.  
 (b) Sabendo que o indivíduo escolhido ingere bebidas alcoólicas, calcule a probabilidade de sofrer de hipertensão.

**Solução:**

Notação:

 $H$  : indivíduo é hipertenso  $\bar{H}$  : indivíduo não é hipertenso $A$  : indivíduo ingere bebida alcólica  $\bar{A}$  : indivíduo não ingere bebida alcólica

Dados:

$$P[H] = 0,05 \quad , \quad P[A|H] = 0,75 \quad , \quad P[A|\bar{H}] = 0,50$$

Portanto

$$P[\bar{H}] = 1 - P[H] = 0,95$$

- (a)  $P[A] = P[A \cap H] + P[A \cap \bar{H}] = P[A|H] \cdot P[H] + P[A|\bar{H}] \cdot P[\bar{H}] = 0,75 \cdot 0,05 + 0,50 \cdot 0,95 = 0,5125$   
 (b)  $P[H|A] = \frac{P[H \cap A]}{P[A]} = \frac{P[A|H] \cdot P[H]}{P[A]} = \frac{0,75 \cdot 0,05}{0,5125} = 0,0732$

Observação: o problema poderia ser organizado e resolvido utilizando uma tabela  $2 \times 2$ :

	$H$	$\bar{H}$	
$A$	$P[A \cap H] = 0,0375$	$P[A \cap \bar{H}] = 0,475$	$P[A] = 0,5125$
$\bar{A}$	$P[\bar{A} \cap H] = 0,0125$	$P[\bar{A} \cap \bar{H}] = 0,475$	$P[\bar{A}] = 0,4875$
	$P[H] = 0,05$	$P[\bar{H}] = 0,95$	1

3. Registos efetuados levaram a concluir que os motoristas que circulam em determinada estrada podem ter transgressões classificadas em dois tipos ditas do tipo I ou do tipo II, não se notando nenhum caso em que o motorista cometa ambas as transgressões. Por cada 500 motoristas multados há 100 motoristas multados por transgressões do tipo I. Sabendo que 10% dos motoristas que cometem transgressões do tipo I são multados; que 1% cometem transgressões do tipo I e que 2% cometem transgressões do tipo II, calcule a probabilidade de que um motorista que circule nessa estrada e cometa uma transgressão do tipo II seja multado.

**Solução:**

Notação:

 $I$  : transgressão do tipo I ;  $II$  : transgressão do tipo II ;  $0$  : sem transgressão $M$  : motorista recebe multa ;  $\bar{M}$  : motorista não recebe multa

Dados:

$$P[I \cap II] = 0$$

$$P[I|M] = 100/500 = 0,20$$

$$P[M|I] = 0,10$$

$$P[I] = 0,01 \text{ e } P[II] = 0,02$$

Queremos calcular  $P[M|II]$ .

A partir dos dados temos que:

$$P[II|M] = 1 - P[1|M] = 0,80$$

$$P[M|I] \cdot P[I] = 0,10 \cdot 0,01 = 0,001$$

Podemos obter  $P[M]$ :

$$P[I|M] = 0,20$$

$$\frac{P[M \cap I]}{P[M]} = 0,20$$

$$\frac{0,001}{P[M]} = 0,20$$

$$P[M] = 0,005$$

Como  $P[M] = P[M \cap I] + P[M \cap II]$  temos que

$$P[M \cap II] = 0,004$$

$$P[M|II] \cdot P[II] = 0,004$$

$$P[M|II] = 0,004/0,02 = 0,20$$

Alternativamente, o problema pode ser esquematizado na tabela:

	0	I	II	
M	$P[0 \cap M] = 0$	$P[I \cap M] = 0,001$	$P[II \cap M] = 0,004$	0,005
$\bar{M}$	$P[0 \cap \bar{M}] = 0,97$	$P[I \cap \bar{M}] = 0,009$	$P[II \cap \bar{M}] = 0,016$	0,995
	$P[0] = 0,97$	$P[I] = 0,01$	$P[II] = 0,02$	1

Semana 4 (av-03)

Um estudante vai fazer um teste no qual cada questão tem cinco alternativas das quais apenas uma é correta. Nos dois contextos a seguir defina a variável aleatória, seus possíveis valores, sua distribuição de probabilidades e calcule a probabilidade pedida, supondo-se acerto ao acaso (ou seja, o estudante “chuta” todas as questões).

- Contexto 1:** O estudante vai fazer cinco questões e deseja-se a probabilidade de acertar três ou mais questões.
- Contexto 2:** As questões são apresentadas sequencialmente e o teste se encerra quando o estudante erra alguma questão. Qual a probabilidade do estudante acertar três ou mais questões.

Itens extras discutidos em sala:

- Contexto 3:** Considere o mesmo que no **Contexto 2**, só que encerrando quando erra a *terceira* questão.
- Contexto 4:** Considere que há um banco de 30 questões das quais o estudante sabe 10. Selecionam-se cinco questões e deseja-se saber a probabilidade de mais que três acertos.

**Solução:**

### 1. Contexto 1:

$X$  : número de acertos em cinco questões

$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$X \sim B(n = 5, p = 1/5)$$

$$P[X = x] = \binom{5}{x} p^x (1-p)^{5-x}$$

$p$  : probabilidade de acertar cada questão (“sucesso”)

$$\begin{aligned} P[X \geq 3] &= P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] = \\ &= \binom{5}{3} 0,2^3 (1-0,2)^{5-3} + \binom{5}{4} 0,2^4 (1-0,2)^{5-4} + \binom{5}{5} 0,2^5 (1-0,2)^{5-5} = 0.0579 \end{aligned}$$

### 2. Contexto 2:

$X$  : número de acertos até o primeiro erro

$$x \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$X \sim G(n = 4, p = 4/5)$$

$$P[X = x] = (1-p)^x p$$

$p$  : probabilidade de errar a questão (“sucesso”)

$$P[X \geq 3] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]) = 1 - (0,2^0 0,8 + 0,2^1 0,8 + 0,2^2 0,8) = 0.008$$

### 3. Contexto 3:

$X$  : número de acertos até o terceiro erro

$$x \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$X \sim BN(k = 3, p = 4/5)$$

$$P[X = x] = \binom{x+k-1}{x} (1-p)^x p$$

$p$  : probabilidade de errar a questão (“sucesso”)

$$\begin{aligned} P[X \geq 3] &= 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]) = \\ &= 1 - \left( \binom{2}{0} 0,2^0 0,8 + \binom{3}{1} 0,2^1 0,8 + \binom{4}{2} 0,2^2 0,8 \right) = 0.0579 \end{aligned}$$

### 4. Contexto 4:

$X$  : número de acertos em cinco questões sorteadas

$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$X \sim HG(N = 30, K = 10, n = 5)$$

$$P[X = x] = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\begin{aligned} P[X \geq 3] &= P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] = \\ &= \frac{\binom{10}{3} \binom{20}{2}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{4} \binom{20}{1}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{10}{5} \binom{20}{0}}{\binom{30}{5}} = 0.1912 \end{aligned}$$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> pa <- pbinom(2, size=5, prob=1/5, lower=FALSE)
> pb <- pgeom(2, prob=4/5, lower=FALSE)
> pc <- pnbinom(2, size=3, prob=4/5, lower=FALSE)
> pd <- phyper(2, m=10, n=20, k=5, lower=FALSE)
```

1. Considere que serão feitas inspeções em veículos em uma determinada área para identificar e orientar a correção de irregularidades. Supõe-se que os veículos inspecionados são escolhidos ao acaso. Considere os diferentes cenários descritos em cada um dos itens a seguir, identifique a variável aleatória em questão, seus possíveis valores, sua distribuição de probabilidades e responda à questão formulada.

- (a) Em um lote de 50 veículos sabe-se que 8 deles possuem alguma irregularidade. Serão inspecionados sete veículos. Qual a probabilidade de encontrar mais de um com alguma irregularidade?
- (b) Sabendo que 15% dos veículos na área apresentam irregularidade, serão inspecionados veículos até que seja encontrado o segundo com irregularidade. Qual a probabilidade de que sejam feitas no máximo cinco inspeções?
- (c) A partir de experiências anteriores sabe-se que são encontrados, em média, 1,8 carros irregulares por hora de inspeção. Qual a probabilidade de que em uma hora não seja encontrado nenhum carro irregular? E qual a probabilidade de que sejam encontrados exatamente cinco irregulares em duas horas de inspeção? (supondo ainda que 15% dos carros da região são irregulares)
- (d) A partir de um certo momento decide-se que a inspeção vai terminar quando for encontrado o próximo veículo irregular. Qual a probabilidade de que a partir deste momento sejam ainda inspecionados três ou mais carros?
- (e) Um inspetor vai inspecionar sete carros. Qual a probabilidade de que encontre mais que um irregular? (supondo ainda que 15% dos carros da região são irregulares)

### Solução:

#### (a) Contexto 1:

$X$  : número veículos com irregularidade (dentre os sete selecionados)

$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$X \sim \text{HG}(N = 200, K = 30, n = 7)$$

$$P[X = x] = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$\begin{aligned} P[X > 1] &= P[X = 2] + P[X = 3] + \dots + P[X = 7] = 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1]\} \\ &= 1 - \left\{ \frac{\binom{8}{0} \binom{42}{7}}{\binom{50}{7}} + \frac{\binom{8}{1} \binom{42}{6}}{\binom{50}{7}} \right\} = 0.3098 \end{aligned}$$

#### (b) Contexto 2:

$Y$  : número de inspeções até o segundo irregular

$$y \in \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$X$  : número de regulares até o segundo irregular

$$x \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$X \sim \text{BN}(k = 2, p = 0, 15)$$

$$P[X = x] = \binom{x+k-1}{x} p^k (1-p)^x$$

$p$  : probabilidade de encontrar um veículo irregular (“sucesso”)

$$\begin{aligned} P[Y \leq 5] &= P[X \leq 3] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] = \\ &= \binom{1}{0} 0,15^2 0,85^0 + \binom{2}{1} 0,15^2 0,85^1 + \binom{3}{2} 0,15^2 0,85^2 + \binom{4}{1} 0,15^2 0,85^3 = 0.7765 \end{aligned}$$

#### (c) Contexto 3:

$X_1$  : número de irregulares por hora

$$x_1 \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$X_1 \sim \text{P}(\lambda = 1, 8)$$

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$P[X_1 = 0] = \frac{e^{-1,8} 1,8^0}{0!} = 0.1653$$

$X_2$  : número de irregulares por período de duas (2) horas

$$x_2 \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$X_2 \sim \text{P}(\lambda = 2 \cdot 1, 8 = 3, 6)$$

$$P[X_2 = 5] = \frac{e^{-3,6} 3,6^5}{5!} = 0.1377$$

(d) **Contexto 4:**

$Y$  : número de inspeções até o próximo irregular

$$y \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$X$  : número de regulares até o próximo irregular

$$x \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$X \sim G(p = 0,15)$

$$P[X = x] = (1 - p)^x p$$

$p$  : probabilidade de encontrar um veículo irregular (“sucesso”)

$$\begin{aligned} P[Y \geq 3] &= P[X \geq 2] = 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1]\} = \\ &= 1 - \{0,15 \cdot 0,85^0 + 0,15 \cdot 0,85^1\} = 0.7225 \end{aligned}$$

(e) **Contexto 5:**

$X$  : número de irregulares em sete (7) inspeções

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

$p$  : probabilidade de acertar cada questão (“sucesso”)

$$P[X > 1] = 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1]\} = 1 - \left\{ \binom{5}{0} 0,15^0 (1 - 0,15)^{7-0} + \binom{5}{1} 0,15^1 (1 - 0,15)^{7-1} \right\} = 0.2834$$

Soluções computacionais (linguagem R):

```
> pa <- phyper(1, m=8, n=42, k=7, lower=FALSE)
> pb <- pnbinom(4, size=2, prob=0.15, lower=FALSE)
> pc1 <- dpois(0, lambda=1.8)
> pc2 <- dpois(5, lambda=2*1.8)
> pd <- pgeom(1, prob=0.15, lower=FALSE)
> pe <- pbinom(1, size=7, prob=0.15, lower=FALSE)
```

---