

GRR: _____ Nome: _____ Turma: _____

Avaliação 01

1. Uma *playlist* vai ser montada com três músicas selecionadas a partir de uma lista de quatro músicas do(a) artista *A*, outra lista de três de *B* e outra de duas de *C*. A sequência de músicas na *playlist* é montada ao acaso porém não repete músicas e tem uma de cada artista sempre na sequência de *A*, *B* e *C* nesta ordem..
 - (a) Explique se e por que a composição da *playlist* pode ser considerada um experimento aleatório.
 - (b) Forneça o espaço amostral.
 - (c) Caracterize o espaço amostral quanto a ser (i) finito ou infinito, (ii) enumerável ou não enumerável, (iii) equiprovável ou não equiprovável, justificando as respostas.
 - (d) Considere o evento “a *playlist* inicia com a segunda música do(a) artista *A*”. Qual o conjunto que define este evento e qual a sua probabilidade de ocorrência?
 - (e) Considere o evento “a *playlist* não contém as primeiras músicas das listas de nenhum dos(as) artistas”. Qual o conjunto que define este evento e qua a sua probabilidade de ocorrência?
 - (f) Qual seria a probabilidade de ocorrência de ambos eventos definidos no itens eventos anteriores?
 - (g) E qual seria a probabilidade de ocorrência de algum deles?
 - (h) Quantas *playlists* seria possíveis se a ordem dos(as) artistas também fosse tomada ao acaso?
 - (i) Quantas *playlists* seriam possíveis se fosse permitido o sorteio de mais de uma música do mesmo artista, porém ainda sem repetição de música?
 - (j) Neste caso, qual seria a probabilidade da *playlist* não conter uma música do artista *A*?

Solução:

Notação:

*A*1, *A*2, *A*3 e *A*4 : músicas do(a) artista *A*

*B*1, *B*2, e *B*3 : músicas do(a) artista *B*

*C*1 e *C*2 : músicas do(a) artista *C*

- (a) Sim, pelo fato da ordem dos artistas e músicas de cada um ser escolhada ao acaso.
- (b) $\Omega_1 = \{(A1, B1, C1), (A1, B1, C2), (A1, B2, C1), (A1, B2, C2), (A1, B3, C1), (A1, B3, C2), (A2, B1, C1), (A2, B1, C2), (A2, B2, C1), (A2, B2, C2), (A2, B3, C1), (A2, B3, C2), (A3, B1, C1), (A3, B1, C2), (A3, B2, C1), (A3, B2, C2), (A3, B3, C1), (A3, B3, C2), (A4, B1, C1), (A4, B1, C2), (A4, B2, C1), (A4, B2, C2), (A4, B3, C1), (A4, B3, C2)\}$
 $n(\Omega_1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
- (c) Finito, enumerável e equiprovável. (Justificativa)
- (d) $E_1 = \{(A2, B1, C1), (A2, B1, C2), (A2, B2, C1), (A2, B2, C2), (A2, B3, C1), (A2, B3, C2)\}$
 $P[E_1] = n(E_1)/n(\Omega_1) = 6/24 = 1/4 = 0,25$
- (e) $E_2 = \{(A2, B2, C2), (A2, B3, C2), (A3, B2, C2), (A3, B3, C2), (A4, B2, C2), (A4, B3, C2)\}$
 $P[E_2] = n(E_2)/n(\Omega_1) = 6/24 = 1/4 = 0,25$
- (f) $P[E_1 \cap E_2] = 2/24 = 0.0833$
- (g) $P[E_1 \cup E_2] = P[E_1] + P[E_2] - P[E_1 \cap E_2] = 10/24 = 0.417$
- (h) $n(\Omega_2) = 24 * 6 = 144$
- (i) $n(\Omega_3) = 9 * 8 * 7 = 504$
- (j) $P[\bar{A}|\Omega_3] = (5 * 4)/504 = 0.0397$

-
1. Três algoritmos diferentes vão ser testados para a classificação do diagnóstico baseado em exames e imagens. Cada algoritmo pode acertar o diagnóstico da presença de certa doença e sabe-se que até o momento as taxas de acerto são de 85, 90 e 70%. Uma imagem/exames de um paciente com a doença é fornecida aos três algoritmos e avalia-se o acerto de cada um deles.

- (a) Forneça o espaço amostral.
- (b) Caracterize o espaço amostral quanto a ser (i) finito ou infinito, (ii) enumerável ou não enumerável, (iii) equiprovável ou não equiprovável, justificando as respostas.
- (c) Defina dois eventos e forneça suas probabilidades.
- (d) Qual a probabilidade de que A acerte o diagnóstico ou que apenas um algoritmo acerte?
- (e) Qual a probabilidade de que A tenha acertado o diagnóstico sabendo que apenas um algoritmo acertou?
- (f) Qual a probabilidade de que nem A nem B acertem o diagnóstico?
- (g) Qual a probabilidade da doença ser detectada?
- (h) Qual a probabilidade de B acertar o diagnóstico sabendo que a doença foi detectada?
- (i) Defina uma variável aleatória sobre este espaço amostral e indique seus possíveis valores.
- (j) Obtenha a distribuição de probabilidades da variável aleatória.

Solução:

Notação:

A : o algoritmo A acerta o diagnóstico ; \bar{A} :: o algoritmo A erra o diagnóstico

$$P[A] = 0,85 \quad P[\bar{A}] = 0,15$$

B : o algoritmo B acerta o diagnóstico ; \bar{B} :: o algoritmo B erra o diagnóstico

$$P[B] = 0,90 \quad P[\bar{B}] = 0,10$$

C : o algoritmo C acerta o diagnóstico ; \bar{C} :: o algoritmo C erra o diagnóstico

$$P[C] = 0,70 \quad P[\bar{C}] = 0,30$$

- (a) $\Omega = \{(A, B, C), (\bar{A}, B, C), (A, \bar{B}, C), (A, B, \bar{C}), (\bar{A}, \bar{B}, C), (\bar{A}, B, \bar{C}), (A, \bar{B}, \bar{C}), (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})\}$

(b) Finito, enumerável e não equiprovável. (Justificativa)

(c)

$$E_1 : A \text{ acerta o diagnóstico} = \{(A, B, C), (A, \bar{B}, C), (A, B, \bar{C}), (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})\}$$

$$P[E_1] = 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,30 + 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.85$$

$$E_2 : B \text{ erra o diagnóstico} = \{(A, \bar{B}, C), (\bar{A}, \bar{B}, C), (A, \bar{B}, \bar{C}), (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})\}$$

$$P[E_2] = 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.304$$

(d)

$$E_3 : \text{apenas um algoritmo acerta o diagnóstico} = \{(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}), (\bar{A}, B, \bar{C}), (\bar{A}, \bar{B}, C)\}$$

$$P[E_3] = 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,90 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,70 = 0.0765$$

$$E_1 \cap E_3 = \{(A, \bar{B}, \bar{C})\}; \quad P[E_1 \cap E_3] = 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.0255$$

$$P[E_1 \cup E_3] = P[E_1] + P[E_3] - P[E_1 \cap E_3] = 0.85 + 0.0765 - 0.0255 = 0.901$$

$$(e) \quad P[E_1 | E_3] = \frac{P[E_1 \cap E_3]}{P[E_3]} = \frac{0.0255}{0.0765} = 0.333$$

(f)

$$E_4 : \text{nem A nem B acertam o diagnóstico} = \{(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}), (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})\}$$

$$P[E_4] = 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.015$$

note que: $P[\bar{A}] \cdot P[\bar{B}] = 0,15 \cdot 0,10 = 0.015$ (*independentes*)

(g)

$$E_5 : \text{da doença ser detectada}$$

$$P[E_5] = 1 - P[\bar{E}_5] = 1 - 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0.996$$

(h)

$$P[B] = 1 - P[E_2]$$

$$B \cap E_5 = \{(A, B, C), (\bar{A}, B, C), (A, B, \bar{C}), (\bar{A}, B, \bar{C})\}$$

$$P[B \cap E_5] = 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,70 + 0,15 \cdot 0,90 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,90 \cdot 0,30 = 0.9$$

$$P[B | E_5] = \frac{P[B \cap E_5]}{P[E_5]} = \frac{0.9}{0.996} = 0.904$$

(i)

X : número de algorítmos que acertam o diagnóstico
 $x \in \{0, 1, 2, 3\}$

(j)

x	0	1	2	3
P[X=x]	0.0045	0.0765	0.383	0.535
