

GRR: _____ Nome: _____ Turma: _____

Avaliação 01

1. Uma *playlist* vai ser montada com três músicas selecionadas a partir de uma lista de quatro músicas do(a) artista A , outra lista de três de B e outra de duas de C . A sequência de músicas na *playlist* é montada ao acaso porém não repete músicas e tem uma de cada artista sempre na sequência de A , B e C nesta ordem..
 - (a) Explique se e por que a composição da *playlist* pode ser considerada um experimento aleatório.
 - (b) Forneça o espaço amostral.
 - (c) Caracterize o espaço amostral quanto a ser (i) finito ou infinito, (ii) enumerável ou não enumerável, (iii) equiprovável ou não equiprovável, justificando as respostas.
 - (d) Considere o evento “a *playlist* inicia com a segunda música do(a) artista A ”. Qual o conjunto que define este evento e qual a sua probabilidade de ocorrência?
 - (e) Considere o evento “a *playlist* não contém as primeiras músicas das listas de nenhum dos(as) artistas”. Qual o conjunto que define este evento e qual a sua probabilidade de ocorrência?
 - (f) Qual seria a probabilidade de ocorrência de ambos eventos definidos no itens eventos anteriores?
 - (g) E qual seria a probabilidade de ocorrência de algum deles?
 - (h) Quantas *playlists* seria possíveis se a ordem dos(as) artistas também fosse tomada ao acaso?
 - (i) Quantas *playlists* seriam possíveis se fosse permitido o sorteio de mais de uma música do mesmo artista, porém ainda sem repetição de música?
 - (j) Neste caso, qual seria a probabilidade da *playlist* não conter uma música do artista A ?

Solução:

Notação:

A_1, A_2, A_3 e A_4 : músicas do(a) artista A

$B_1, B_2,$ e B_3 : músicas do(a) artista B

C_1 e C_2 : músicas do(a) artista C

- (a) Sim, pelo fato da ordem dos artistas e músicas de cada um ser escolhida ao acaso.
- (b) $\Omega_1 = \{(A_1, B_1, C_1), (A_1, B_1, C_2), (A_1, B_2, C_1), (A_1, B_2, C_2), (A_1, B_3, C_1), (A_1, B_3, C_2), (A_2, B_1, C_1), (A_2, B_1, C_2), (A_2, B_2, C_1), (A_2, B_2, C_2), (A_2, B_3, C_1), (A_2, B_3, C_2), (A_3, B_1, C_1), (A_3, B_1, C_2), (A_3, B_2, C_1), (A_3, B_2, C_2), (A_3, B_3, C_1), (A_3, B_3, C_2), (A_4, B_1, C_1), (A_4, B_1, C_2), (A_4, B_2, C_1), (A_4, B_2, C_2), (A_4, B_3, C_1), (A_4, B_3, C_2)\}$
 $n(\Omega_1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
- (c) Finito, enumerável e equiprovável. (Justificativa)
- (d) $E_1 = \{(A_2, B_1, C_1), (A_2, B_1, C_2), (A_2, B_2, C_1), (A_2, B_2, C_2), (A_2, B_3, C_1), (A_2, B_3, C_2)\}$
 $P[E_1] = n(E_1)/n(\Omega_1) = 6/24 = 1/4 = 0,25$
- (e) $E_2 = \{(A_2, B_2, C_2), (A_2, B_3, C_2), (A_3, B_2, C_2), (A_3, B_3, C_2), (A_4, B_2, C_2), (A_4, B_3, C_2)\}$
 $P[E_2] = n(E_2)/n(\Omega_1) = 6/24 = 1/4 = 0,25$
- (f) $P[E_1 \cap E_2] = 2/24 = 0.0833$
- (g) $P[E_1 \cup E_2] = P[E_1] + P[E_2] - P[E_1 \cap E_2] = 10/24 = 0.417$
- (h) $n(\Omega_2) = 24 \cdot 6 = 144$
- (i) $n(\Omega_3) = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$
- (j) $P[\bar{A}|\Omega_3] = (5 \cdot 4)/504 = 0.0397$

1. Três algoritmos diferentes vão ser testados para a classificação do diagnóstico baseado em exames e imagens. Cada algoritmo pode acertar o diagnóstico da presença de certa doença e sabe-se que até o momento as taxas de acerto são de 85, 90 e 70%. Uma imagem/exames de um paciente com a doença é fornecida aos três algoritmos e avalia-se o acerto de cada um deles.

- (a) Forneça o espaço amostral.
 (b) Caracterize o espaço amostral quanto a ser (i) finito ou infinito, (ii) enumerável ou não enumerável, (iii) equiprovável ou não equiprovável, justificando as respostas.
 (c) Defina dois eventos e forneça suas probabilidades.
 (d) Qual a probabilidade de que A acerte o diagnóstico ou que apenas um algoritmo acerte?
 (e) Qual a probabilidade de que A tenha acertado o diagnóstico sabendo que apenas um algoritmo acertou?
 (f) Qual a probabilidade de que nem A nem B acertem o diagnóstico?
 (g) Qual a probabilidade da doença ser detectada?
 (h) Qual a probabilidade de B acertar o diagnóstico sabendo que a doença foi detectada?
 (i) Defina uma variável aleatória sobre este espaço amostral e indique seus possíveis valores.
 (j) Obtenha a distribuição de probabilidades da variável aleatória.

Solução:

Notação:

A : o algoritmo A acerta o diagnóstico ; \bar{A} :: o algoritmo A erra o diagnóstico
 $P[A] = 0,85$ $P[\bar{A}] = 0,15$
 B : o algoritmo B acerta o diagnóstico ; \bar{B} :: o algoritmo B erra o diagnóstico
 $P[B] = 0,90$ $P[\bar{B}] = 0,10$
 C : o algoritmo C acerta o diagnóstico ; \bar{C} :: o algoritmo C erra o diagnóstico
 $P[C] = 0,70$ $P[\bar{C}] = 0,30$

- (a) $\Omega = \{(A, B, C), (\bar{A}, B, C), (A, \bar{B}, C), (A, B, \bar{C}), (\bar{A}, \bar{B}, C), (\bar{A}, B, \bar{C}), (A, \bar{B}, \bar{C}), (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})\}$
 (b) Finito, enumerável e não equiprovável. (Justificativa)
 (c)

E_1 : A acerta o diagnóstico = $\{(A, B, C), (A, \bar{B}, C), (A, B, \bar{C}), (A, \bar{B}, \bar{C})\}$
 $P[E_1] = 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,30 + 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0,85$
 E_2 : B erra o diagnóstico = $\{(A, \bar{B}, C), (\bar{A}, \bar{B}, C), (A, \bar{B}, \bar{C}), (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})\}$
 $P[E_2] = 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0,304$

(d)

E_3 : apenas um algoritmo acerta o diagnóstico = $\{(A, \bar{B}, \bar{C}), (\bar{A}, B, \bar{C}), (\bar{A}, \bar{B}, C)\}$
 $P[E_3] = 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,90 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,70 = 0,0765$
 $E_1 \cap E_3 = \{(A, \bar{B}, \bar{C})\}$; $P[E_1 \cap E_3] = 0,85 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0,0255$
 $P[E_1 \cup E_3] = P[E_1] + P[E_3] - P[E_1 \cap E_3] = 0,85 + 0,0765 - 0,0255 = 0,901$

(e) $P[E_1|E_3] = \frac{P[E_1 \cap E_3]}{P[E_3]} = \frac{0,0255}{0,0765} = 0,333$

(f)

E_4 : nem A nem B acertam o diagnóstico = $\{(\bar{A}, \bar{B}, C), (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})\}$
 $P[E_4] = 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,70 + 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0,015$
 note que: $P[\bar{A}] \cdot P[\bar{B}] = 0,15 \cdot 0,10 = 0,015$ (*independentes*)

(g)

E_5 : da doença ser detectada
 $P[E_5] = 1 - P[\bar{E}_5] = 1 - 0,15 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0,996$

(h)

$P[B] = 1 - P[E_2]$
 $B \cap E_5 = \{(A, B, C), (\bar{A}, B, C), (A, B, \bar{C}), (\bar{A}, B, \bar{C})\}$
 $P[B \cap E_5] = 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,70 + 0,15 \cdot 0,90 \cdot 0,70 + 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,90 \cdot 0,30 = 0,9$
 $P[B|E_5] = \frac{P[B \cap E_5]}{P[E_5]} = \frac{0,9}{0,996} = 0,904$

(i)

X : número de algoritmos que acertam o diagnóstico
 $x \in \{0, 1, 2, 3\}$

(j)

x	0	1	2	3
$P[X=x]$	0.0045	0.0765	0.383	0.535

Avaliação 03

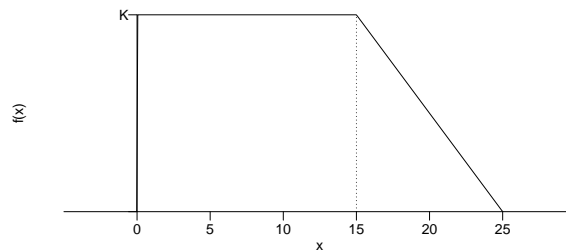
1. A localização de ocorrências em um trecho de 25 km de rodovia é considerada ser uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} K & \text{se } 0 < x \leq 15 \\ -\frac{K}{10}(x - 25) & \text{se } 15 < x \leq 25 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 25 \end{cases}$$

- (a) Encontre o valor de K .
(b) Qual a probabilidade de ocorrer uma ocorrência nos primeiros 10 km?
(c) Se sabe-se que uma ocorrência ocorreu antes do km 20, qual a probabilidade de que tenha sido antes do km 10?
(d) Qual a probabilidade de uma ocorrência ter ocorrido entre os km 12 e 22 ?
(e) Se uma central de apoio for colocada no km 0, qual a distância que espera-se percorrer para atender 100 ocorrências?

Solução:

A função $f(x)$ tem a forma conforme a seguinte figura:



- (a) Para que $f(x)$ seja uma f.d.p. a área sob a figura deve ser 1, ou seja, $\int_0^{25} f(x)dx = 1$.

Solução geométrica:

$$\begin{aligned} b_r \cdot h_r + \frac{b_t \cdot h_t}{2} &= 1 \\ 15 \cdot K + \frac{10 \cdot K}{2} &= 1 \\ K &= \frac{1}{20} = 0,05 \end{aligned}$$

Solução por integração:

$$\begin{aligned} \int_0^{25} f(x)dx &= 1 \\ \int_0^{15} f(x)dx + \int_{15}^{25} f(x)dx &= 1 \\ K \cdot (15 - 0) - \frac{K}{10} \left(25 \cdot (25 - 15) - \frac{25^2 - 15^2}{2} \right) &= 1 \\ K &= \frac{1}{20} = 0,05 \end{aligned}$$

- (b) $P[X \leq 10]$

Solução geométrica:

$$P[X \leq 10] = b_r \cdot h_r = 10 \cdot 0,05 = 0,5 = 1/2$$

Solução por integração:

$$\int_0^{10} f(x)dx = 0,05 \cdot (15 - 0) = 0.5 = 1/2$$

(c)

$$P[X \leq 10 | X \leq 20] = \frac{P[(X \leq 10) \cap (X \leq 20)]}{P[X \leq 20]} = \frac{P[X \leq 10]}{P[X \leq 20]}$$

é mais conveniente calcular: $P[X \leq 20] = 1 - P[X > 20]$ **Solução geométrica:**

$$P[X > 20] = \frac{b_t \cdot h_t}{2} = \frac{(25 - 20) \cdot f(20)}{2} = 0.9375 = 15/16$$

Solução por integração:

$$P[X > 20] = \int_{20}^{25} f(x)dx = 0,005 \left(25(25 - 20) - \frac{25^2 - 20^2}{2} \right) = 0.9375 = 15/16$$

Portanto,

$$P[X \leq 10 | X \leq 20] = \frac{1}{0.9375} = 0.5333 = 8/15$$

(d) $P[12 \leq X \leq 22]$ **Solução geométrica:**

$$P[12 \leq X \leq 22] = b_r \cdot h_r + \frac{b_t \cdot h_t}{2} = (15 - 12) \cdot K + \frac{f(15) \cdot f(22)}{2} = 0.3775 = 6550/17351$$

Solução por integração:

$$\int_{12}^{22} f(x)dx = \int_{12}^{15} f(x)dx + \int_{15}^{22} f(x)dx = 0,05(15-12) - 0,005 \left(25 \cdot (22 - 15) - \frac{22^2 - 15^2}{2} \right) = 0.3775 = 6550/17351$$

(e) $100 \cdot E[X] = 100 \cdot \int_0^{25} x \cdot f(x)dx = 1021$ **Solução computacional:**

```

> fx <- function(x){
+   y <- numeric(length(x))
+   y[x > 0 & x <= 15] <- 0.05
+   y[x > 15 & x <= 25] <- -0.005 * (x[x > 15 & x <= 25] - 25)
+   return(y)
+ }
> ## (a)
> (qa <- integrate(fx, 0, 25)$value)
[1] 1
> ## (b)
> (qb <- integrate(fx, 0, 10)$value)
[1] 0.5
> ## (c)
> (p20 <- integrate(fx, 0, 20)$value)
[1] 0.9375
> (qc <- integrate(fx, 0, 10)$value/integrate(fx, 0, 20)$value)
[1] 0.5333
> ## (d)
> (qd <- integrate(fx, 12, 22)$value)
[1] 0.3775
> ## (e)
> Ex.f <- function(x){ x * fx(x)}
> (EX <- integrate(Ex.f, 0, 25)$value)
[1] 10.21

```

1. Seja uma função de densidade de probabilidades $f(x) = 0,2 - 0,02x I_{0,10}(x)$.

- Esboce um gráfico da função.
- Mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidades (f.d.p.) válida.
- Obtenha a expressão de $F(x)$ e seu gráfico.
- Obtenha o valor médio $E[X]$ e a variância $\text{Var}[X]$
Obtenha as probabilidades:
 - $P[X > 2]$,
 - $P[X < 7]$,
 - $P[X > 5]$,
 - $P[X > E[X]]$,
 - $P[X > 2|X < 7]$,
 - $P[3 < X < 8]$.
- Obtenha os quantis 0,15, 0,25, 0,50, 0,60, 0,75 e 0,90,

Solução:

- Ver Figura (esquerda)
- Mostrar que:

$$(i) f(x) \geq 0 \forall x$$

$$(ii) \int_0^{10} f(x)dx = 1$$

- Ver Figura (direita)

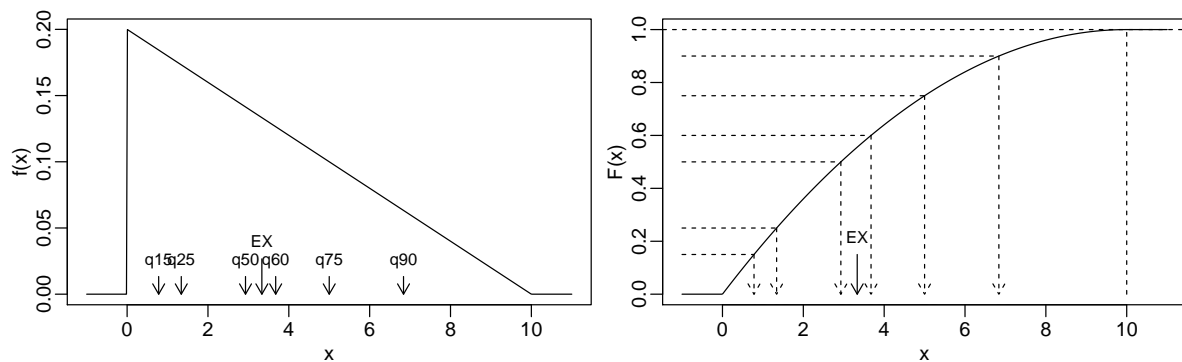


Figura 1: Função de densidade de probabilidade e acumulada com valores da esperança e quantis indicados.

-

$$E[X] = \int_0^{10} x \cdot f(x)dx = \dots = 3.33$$

$$\text{Var}[X] = \int_0^{10} (x - E[X])^2 \cdot f(x)dx$$

$$= E[X^2] - (E[X])^2 = \int_0^{10} x \cdot f(x)dx - (E[X])^2 = \dots = 16.7 - (3.33)^2 = 5.56$$

- $P[X > 2] = 1 - F(2) = 1 - (0,2 \cdot 2 - 0,01 \cdot 2^2) = 0.64$
- $P[X < 7] = F(7) = 0,2 \cdot 7 - 0,01 \cdot 7^2 = 0.91$
- $P[X > 5] = 1 - F(5) = 1 - (0,2 \cdot 5 - 0,01 \cdot 5^2) = 0.25,$
- $P[X > E[X]] = 1 - F(10/3) = 1 - (0,2 \cdot 10/3 - 0,01 \cdot (10/3)^2) = 0.444$
- $P[X > 2|X < 7] = \frac{P[2 < X < 7]}{P[X < 7]} = \frac{F(7) - F(2)}{F(7)} = 0.604$
- $P[3 < X < 8] = F(8) - F(3) = 0.45$

- (k) Para qualquer quantil q_p , $F(q) = p$, ou seja, $q = F^{-1}(p)$, portanto para a $f(x)$ dada o quantil é a raiz da equação $0,2q_p - 0,01q_p^2 = p$ que estiver no intervalo $(0, 10)$ no qual a função está definida.

$$\begin{aligned} q_{0,15} &= 0.78 \\ q_{0,25} &= 1.34 \\ q_{0,50} &= 2.93 \\ q_{0,60} &= 3.68 \\ q_{0,75} &= 5 \\ q_{0,90} &= 6.84 \end{aligned}$$

Soluções computacionais com o programa R:

```
> fx <- function(x){
+   y <- ifelse(x>0 & x<10, 0.2 - 0.02*x, 0)
+   return(y)
+ }
> Fx <- function(x){
+   y <- numeric(length(x))
+   I1 <- (x > 0 & x < 10)
+   y[I1] <- 0.2*x[I1] - 0.01*(x[I1])^2
+   y[x>10] <- 1
+   return(y)
+ }
> par(mfrow=c(1,2), mar=c(2.5,2.5,0.5, 0.5), mgp=c(1.5,0.5,0))
> xs <- seq(-1, 11, length=501)
> #
> plot(xs, fx(xs), type="l", xlab="x", ylab="f(x)")
> arrows(EX, fx(EX)/5, EX, 0, length=0.1)
> text(EX, fx(EX)/5, "EX" , pos=3,cex=0.8)
> x0 <- c(q15, q25, q50, q60, q75, q90)
> arrows(x0, fx(EX)/10, x0, 0, length=0.1)
> text(x0, fx(EX)/10, c("q15", "q25", "q50", "q60", "q75", "q90") , pos=3,cex=0.8)
> #
> plot(xs, Fx(xs), type="l", xlab="x", ylab="F(x)")
> segments(10,0,10,1, lty=2)
> abline(h=1, lty=2)
> y0 <- c(0.15, 0.25, 0.50, 0.60, 0.75, 0.90)
> segments(-1, y0, x0, Fx(x0), lty=2)
> arrows(x0, Fx(x0), x0, 0, length=0.1, lty=2)
> text(x0, 0, c("q15", "q25", "q50", "q60", "q75", "q90") , pos=1, cex=0.8)
> arrows(EX, 0.15, EX, 0, length=0.1)
> text(EX, 0.15, "EX" , pos=3, cex=0.8)
> Ex.f <- function(x){ x * fx(x)}
> (EX <- integrate(Ex.f, 0, 10)$value)
[1] 3.333
> Ex2.f <- function(x){ x^2 * fx(x)}
> (EX2 <- integrate(Ex2.f, 0, 10)$value)
[1] 16.67
> (VarX <- EX2 - (EX)^2)
[1] 5.556
> (sdX <- sqrt(VarX))
[1] 2.357
> 1 - Fx(2)
[1] 0.64
> Fx(7)
[1] 0.91
> 1 - Fx(5)
[1] 0.25
```

```
> 1 - Fx(EX)
[1] 0.4444
> (Fx(7)-Fx(2))/Fx(7)
[1] 0.6044
> Fx(8)-Fx(3)
[1] 0.45
> q15 <- Re(polyroot(c(-0.15, 0.2, -0.01))); (q15 <- q15[q15 > 0 & q15 < 10])
[1] 0.7805
> q25 <- Re(polyroot(c(-0.25, 0.2, -0.01))); (q25 <- q25[q25 > 0 & q25 < 10])
[1] 1.34
> q50 <- Re(polyroot(c(-0.50, 0.2, -0.01))); (q50 <- q50[q50 > 0 & q50 < 10])
[1] 2.929
> q60 <- Re(polyroot(c(-0.60, 0.2, -0.01))); (q60 <- q60[q60 > 0 & q60 < 10])
[1] 3.675
> q75 <- Re(polyroot(c(-0.75, 0.2, -0.01))); (q75 <- q75[q75 > 0 & q75 < 10])
[1] 5
> q90 <- Re(polyroot(c(-0.90, 0.2, -0.01))); (q90 <- q90[q90 > 0 & q90 < 10])
[1] 6.838
```
