Exercícios de Probabilidade

Paulo Justiniano Ribeiro Jr

Versão compilada em 28 de junho de 2013 às 15:00

1. Forneça exemplos que ilustrem situações nas quais probabilidades são avaliadas pelas definições: a) clássica, b) frequentista, c) subjetiva.

2. Três indivíduos tentam, de forma independente, resolver um problema. O primeiro tem 50% de chance de resolver, o segundo tem 65% e o terceiro tem 30%. Qual a probabilidade do problema ser resolvido?

3. Em um teste múltipla escolha, marca-se uma alternativa em cada uma de quatro questões, cada uma com cinco alternativas da qual apenas uma é correta. Qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão?

4. Dentre seis números inteiros pares e oito ímpares, dois números são escolhidos ao acaso e multiplicados. Qual a probabilidade de que o produto seja par?

5. Dois dados são lançados. Calcule a probabilidade de:

   (a) sairem dois números iguais,

   (b) o produto dos números que sairam ser ímpar,

   (c) o produto dos números que sairam ser ímpar ou a soma ser maior ou igual a 10,

   (d) a soma dos valores ser maior ou igual a sete, sabendo-se que em um dos dados saiu três,

   (e) a soma ser maior que sete sabendo que sairam dois números iguais.

6. Em um teste múltipla escolha, marca-se uma alternativa em cada uma das 5 questões, cada uma com quatro alternativas da qual apenas uma é correta. Qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão?

7. Um reservatório recebe água de três fontes diferentes. A primeira tem 5% de chance de apresentar alguma contaminação, a segunda tem 6,5% e a terceira tem 12%. Qual a probabilidade do reservatório ser contaminado?

8. Considere o problema anterior:
   Em um teste múltipla escolha, marca-se uma alternativa em cada uma das cinco questões, cada uma com quatro alternativas, entre as quais apenas uma é correta. Qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão?

   (a) Indique como fica o espaço amostral do experimento (sem necessariamente listar todos os elementos).

   (b) Defina a variável aleatória (v.a) adequada ao interesse do problema.

   (c) Monte uma tabela com a distribuição de probabilidades desta variável

   (d) Caso possível identifique a distribuição de probabilidades desta variável e fornecendo a equação da distribuição.

   (e) Mostre como obter a probabilidade solicitada a partir do resultado de alguns dos itens anteriores.

9. Nas situações a seguir (i) identifique a v.a., (ii) liste seus possíveis valores e (iii) forneça a expressão da função de probabilidades.

   (a) Sabe-se que a proporção de respondentes a um anúncio é de 5%. Vou verificar quantos acessos serão feitos sem obter resposta até que seja obtida a marca de 10 respondentes.

(b) Vou escolher ao acaso 500 habitantes de Curitiba e verificar quantos sabem o nome do vice-prefeito(a) para estimar a proporção dos que conhecem.

(c) Supondo que a proporção da população que possua um determinado tipo de sangue seja de 12%, vou verificar quantos doadores vou receber até conseguir um que tenha o tipo desejado.

10. Considere um problema anterior.
Em um teste múltipla escolha, marca-se uma alternativa em cada uma de quatro questões, cada uma com cinco alternativas da qual apenas uma é correta. Qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão?

    (a) Indique como fica o espaço amostral do experimento (sem necessariamente listar todos os elementos).
    (b) Defina a variável aleatória (v.a) adequada ao interesse do problema.
    (c) Monte uma tabela com a distribuição de probabilidades desta variável
    (d) Caso possível identifique a distribuição de probabilidades desta variável e fornecendo a equação da distribuição.
    (e) Mostre como obter a probabilidade solicitada a partir do resultado de alguns dos itens anteriores.
    (f) Qual o valor esperado va v.a ? Como este valor deve ser interpretado?

11. Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2/8 & 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    (a) Mostre que $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidade válida.
    (b) Obtenha $P[0,5 < X < 1,5]$.
    (c) Obtenha $P[X > 1,2]$.
    (d) Obtenha $P[X > 1,2|X > 0,5]$.
    (e) Obtenha o valor experado de X.

12. Seja uma v.a. contínua com função de distribuição de probabilidades (f.d.p) $f(x) = k(1 - x^2)\mathrm{I}_{(0,1]}(x)$, obtenha:

    (a) valor de k para que $f(x)$ seja uma f.d.p. válida,
    (b) a média de X,
    (c) a mediana de X,
    (d) a função de distribuição (acumulada) $F(x)$,
    (e) $P[X > 1/2]$,
    (f) $P[X < 0,75]$,
    (g) o primeiro quartil,
    (h) o terceiro quartil,
    (i) $P[0,25 < X < 0,75]$,
    (j) $P[X < 0,75|X > 0,5]$,

13. Alguns biólogos fizeram estudos de laboratório sobre o comportamento de animais quando submetidos a um estímulo, o quais poderiam apresentar ou não resposta positiva. Em particular estavam interessados nas respostas positivas os estímulo. Considera-se que na população destes animais, 10% sejam sensíveis ao estímulo.

    O biologo A possuia um grupo em que 10 animais eram sensíveis e 20 eram insensíveis. Ele selecionou ao acaso 8 animais para teste.

    O biólogo B dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar o terceiro sensível ao estímulo.

    O biólogo C tomou fazia testes diários e encontrava uma média de 2,8 animais sensíveis a cada dia.

    O biólogo D submeteu 10 animais ao estímulo.

O biólogo E dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar um sensível ao estímulo.

(a) Qual a probabilidade do biólogo A encontrar ao menos 2 animais sensíveis?

(b) Qual a probabilidade do biólogo B precisar testar no máximo 6 animais?

(c) Qual a probabilidade do biólogo C encontrar menos que dois sensíveis em um determinado dia?

(d) Qual a probabilidade do biólogo D encontrar mais que 3 animais sensíveis?

(e) Qual a probabilidade do biólogo E precisar testar mais que 3 animais?

Sugestão: especifique a(s) variável(eis) aleatória, sua(s) distribuição(ções) e pressuposições feitas.

14. Dois jogadores vão disputar as finais de um torneio e o campeão será o que vencer três partidas. Baseado no restrospecto dos resultados estima-se que a cada partida as probabilidades de vitória dos jogadores são 0,4 e 0,6. Calcule e/ou responda os itens a seguir.

    (a) Qual a probabilidade de haver mais que três jogos?

    (b) Quais as chances de cada jogador vencer o torneio?

    (c) Qual a probabilidade do jogador com menor chance vencer o torneio caso perca as duas primeiras partidas?

    (d) Qual a probabilidade do jogador com maior chance vencer caso tenha tido apenas uma vitória nas três primeiras partidas?

    (e) Qual(ais) as suposições feitas nos cálculos acima?

15. Em um programa da regeneração são plantadas 10 mudas de uma determinada espécie em cada uma das unidades de manejo. A probabilidade de que qualquer muda complete dois anos de idade é de 0,4. Fazendo suposições necessárias, responda os itens a seguir.

    (a) Qual a probabilidade de uma unidade ter alguma planta com dois anos?

    (b) Quantas mudas deveriam plantadas para que a probabilidade de alguma planta completar dois anos seja superior a 0,99 ?

    (c) Qual deveria ser a probabilidade de cada muda completar dois anos para que a probabilidade da unidade ter alguma muda fosse superior a 0,95?

    (d) Descreva e discuta as suposições feitas para resolver o problema indicando situações em que elas poderiam ser inválidas.

16. Um biólogo percorre uma trilha de 5 km procurando avistar um exemplar de uma determinada ave. A chance de avistar a ave durante uma passada no percurso é de 25% e constante em todo o percurso.

    (a) Qual a probabilidade avistar a ave e que seja nos primeiros 2 km do percurso?

    (b) Se ele avista a ave, qual a probabilidade de que seja nos últimos 500 metros do percurso?

    (c) Se ele avista a ave, qual a probabilidade de que seja no primeiro ou último quilometro do percurso?

    (d) Se ele avistou a ave e sabe-se que não foi nos primeiros 2 km qual a probabilidade de que tenha sido nos últimos 1.500 metros do percurso?

    (e) É adotada a seguinte classificação para uma campanha: A: ave avistada nos primeiros 1.500 metros; B: ave avistada entre 1.500 e 4.000 metros; C: ave avistada nos últimos 1.000 metros; X: ave não avistada. Monte a distribuição de probabilidades da classificação da campanha.

17. Assume-se que o tempo entre acessos a um blog tem uma distribuição com média de 1,5 segundos. Assumindo alguma distribuição responda os itens a seguir.

    (a) Qual a probabilidade de haver duas conexões com intervalo inferior a 1,5 segundos?

    (b) Qual a probabilidade de se passarem 5 segundos sem conexão alguma?

    (c) Tendo havido uma conexão, qual a probabilidade da próxima conexão ocorrer entre 0,5 e 2,5 segundos?

(d) Se já se passou 1 segundo sem conexão, qual a probabilidade de se passar mais 0,5 segundos adicionais sem conexão?

(e) Qual a probabilidade do intervalo entre conexões não superar 3,5 segundos se já se passaram 2 segundos sem conexão?

18. Dois jogadores vão disputar as finais de um torneio e o campeão será o que vencer quatro partidas. Baseado no restrospecto dos resultados estima-se que a cada partida as probabilidades de vitória dos jogadores são 0,4 e 0,6. Calcule e/ou responda os itens a seguir.

    (a) Qual a probabilidade de haver mais que quatro jogos?

    (b) Quais as chances de cada jogador vencer o torneio?

    (c) Qual a probabilidade do jogador com menor chance vencer o torneio caso perca as duas primeiras partidas?

    (d) Qual a probabilidade do jogador com maior chance vencer caso tenha tido apenas uma vitória nas quatro primeiras partidas?

    (e) Qual(ais) as suposições feitas nos cálculos acima?

19. Para fins de segurança de preservação, são feitas cinco cópias de uma biblioteca de arquivos de imagens. A probabilidade de que qualquer cópia seja corrompida durante um certo intervalo de tempo é de 0,01.

    (a) Qual a probabilidade da biblioteca ser perdida durante o período?

    (b) Qual deveria ser a probabilidade individual de cada cópia ser corrompida para que a probabilidade de perda da biblioteca não ultrapassasse 0,001?

    (c) Quantas cópias deveriam ser feitas para que a probabilidade de falha não ultrapassasse 0,001 caso sejam mantidas as probabilidades individuais de falha de 0,01.

    (d) Descreva e discuta as suposições feitas para resolver o problema indicando situações em que elas poderiam ser inválidas.

20. Um site de vendas pela internet registra 40% dos acessos do estado do PR, 50% de outros estados e 10% do exterior. 20% dos acessos do PR resultam em uma compra, enquanto que os percentuais para outros estados e exterior são de 10% e 30%, respectivamente.

    (a) Qual a probabilidade de um acesso resultar em compra?

    (b) Se foi feita uma compra, qual a probabilidade de ela ter sido do exterior?

21. Uma urna contém doze bolas brancas e oito bolas vermelhas. Serão retiradas, sequencialmente, três bolas da urna. A cada bola anota-se a cor e, se a bola for vermelha ela é retornada à urna e se for branca ela é posta de lado.

    (a) Forneça o espaço amostral do experimento.

    (b) Calcule probabilidade de cada elemento do espaço amostral.

    (c) Qual a probabilidade de não se obter todas as bolas da mesma cor?

    (d) Qual a probabilidade de se retirar ao menos duas bolas brancas?

    (e) Qual a probabilidade de retirar três vermelhas sabendo-se que ao menos uma das bolas é vermelha?

    (f) Se a primeira bola for branca, qual a probabilidade de obter três bolas brancas?

22. Um candidato está fazendo uma prova de múltipla escolha com cinco alternativas das quais apenas uma é correta. A chance do candidato saber a solução de uma questão é de 40%. Quando ele sabe a solução ele sempre acerta a questão e quando não sabe ele escolhe uma das respostas ao acaso. Se o candidato acerta a questão, qual a probabilidade de ele saber resolver a questão?

23. Estamos interessados nos tempos de processamento para um certo procedimento de tratamento de imagens. O algoritmo de tratamento e classificação das imagens funciona em dois estágios. O primeiro estágio é realizado em 20 segundos e a experiência mostra que a classificação é encerrada nesse estágio para 25% das imagens. As demais são processadas em um segundo estágio e destas, o processamento de 80% delas é encerrado com mais 30 segundos e 60 segundos para as restantes.

Defina a variável aleatória (v.a.), forneça sua distribuição de probabilidades, a esperança e a variância da v.a. Informe ainda o tempo que espera-se gastar no processamento de 1500 imagens.

24. Um sistema de climatização e refrigeração funciona continuamente e pode ocorrer uma interrupção a qualquer instante do dia com igual probabilidade.

    (a) Qual a probabilidade de ocorrer falhas no período da noite, entre 20:00 e 6:00?
    (b) Qual a probabilidade de ocorrer falhas nos horários de pico de uso entre 9:00-12:00 ou 14:00-17:30?
    (c) Se houve falha na primeira metade do dia, qual a probabilidade de que tenha sido no horário comercial entre 8:30-12:00?
    (d) Se houve uma falha fora do horário comercial de 9:00-18:00, qual a probabilidade de que tenha sido de madrugada entre 0:00-5:00
    (e) Os custos de reparo variam em função do horário do dia. É de R$ 200,00 se a falha é notificada entre 9:00-17:30, R$ 250,00 se a falha é notificada entre 6:00-9:00 ou 17:30-20:00 e R$350,00 para outros horários do dia. Qual o valor esperado para o pagamento de 100 reparos?

25. Assume-se que o tempo entre conexões a um servidor tem distribuição com média de 2,5 segundos.

    (a) Qual a probabilidade de se passarem 10 segundos sem conexão alguma?
    (b) Tendo havido uma conexão, qual a probabilidade de a próxima conexão não ocorrer antes de 1,5 segundos?
    (c) Qual a probabilidade do intervalo entre duas conexões ultrapassar 4 segundos?
    (d) Se já se passaram 2 segundos sem conexão, qual a probabilidade de se passaram mais 4 segundos adicionais sem conexão?
    (e) Qual a probabilidade do intervalo entre conexões superar 4 segundos se já se passaram 2,5 segundos sem conexão?

26. Seja uma variável aleatória X (v.a.) com função de densidade de probabilidade (f.d.p.) dada por:

$$f(x) = \begin{cases} |1-x| & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

    (a) Mostre que $f(x)$ é uma f.d.p..
    (b) Obtenha o valor esperado de X.
    (c) Obtenha a função de distribuição acumulada $F(x)$
    (d) Obtenha $P[X > 1]$.
    (e) Obtenha $P[X < 1,5 | X > 1]$.
    (f) Obtenha $P[X < 0.25 \text{ ou } X > 0,75]$.

    Seja ainda Y uma outra v.a. definida a partir da variável X anterior tal que:

$$Y = \begin{cases} 200 & \text{se } x \leq 0,25 \\ 500 & \text{se } 0,25 < x \leq 0,75 \\ 1000 & \text{se } x > 0,75 \end{cases}$$

    (g) Obtenha a função de probabilidade Y.
    (h) Obtenha o valor esperado de Y.
    (i) Obtenha a função de distribuição acumulada $F(y)$
    (j) Obtenha $P[Y = 1000 | Y \geq 500]$.

27. Um indivíduo vai participar de uma competição que consiste em responder questões que são lhe são apresentadas sequencialmente. Com o nível de conhecimento que possui, a chance de acertar uma questão escolhida ao acaso é de 75% . Neste contexto, para cada diferente situação apresentada a seguir, defina a variável aleatória, sua distribuição de probabilidades e calcule a probabilidade solicitada. Se preciso, faça suposições necessárias e adequadas em cada caso.

(a) Se for responder até errar uma pergunta, qual a probabilidade de conseguir acertar quatro ou mais questões?
(b) Se for responder cinco perguntas, qual a probabilidade de acertar quatro ou mais?
(c) Se for responder até acertar a terceira pergunta, qual a probabilidade de errar apenas uma?
(d) Se o candidato selecionar aleatoriamente seis questões de um banco de 40 questões das quais o candidato sabe a resposta de 30 delas (75%), qual a probabilidade de acertar ao menos cinco delas.

Ainda neste contexto considere que o candidato responde, em média, 1,8 questões por minuto.

(e) Qual a probabilidade de conseguir responder ao menos três questões em três minutos?
(f) Qual a probabilidade de que o tempo para resposta de uma questão seja superior a 40 segundos?

28. Seja uma v.a. X com distribuição normal de média $\mu = 250$ e variância $\sigma^2 = 225$. Obtenha:

(a) $P[X > 270]$.
(b) $P[X < 220]$.
(c) $P[|X - \mu| > 25]$.
(d) $P[|X - \mu| < 30]$.
(e) $P[X < 270|X > 250]$.
(f) o valor x_1 tal que $P[X > x_1] = 0,80$.
(g) o valor x_2 tal que $P[X < x_2] = 0,95$.
(h) qual deveria ser um novo valor da média μ para que $P[X < 240] \leq 0,10$?
(i) com $\mu = 250$ qual deveria ser um novo valor da variância σ^2 para que $P[X < 240] \leq 0,10$?
(j) qual deveria ser um novo valor da variância σ^2 para que $P[|X - \mu| > 15] \leq 0,10$?

29. Um professor preparou 40 versões diferentes de uma lista de exercícios. As listas são atribuídas ao acaso para estudantes sorteando-se para cada um um número de 1 a 40 que identifica a lista. Se um grupo de três colegas decide fazer as listas juntos, que a probabilidade de que ao menos dois deles recebam a mesma versão?

30. Um determinado componente de computador é despachados de uma fábrica para entrega em lotes de 70 unidades. Antes do despacho de um lote, 25 das unidades escolhidas ao acaso passam por um teste detalhado. Se alguma destas unidades falha no teste, todo o lote é rejeitado.

(a) Qual a probabilidade de um lote contendo exatamente quatro unidades falhas ser despachado?
(b) Indique os cálculos necessários para obter o número de unidades que deveriam ser testadas para que esta probabilidade não ultrapasse 0,02?

31. Sabe-se que em um sistema de transmissão de dados, uma tempestade causa, em média, a falha de transmissão de um *pacote* em cada 200. Transmitindo 500 *pacotes* nestas condições, qual a probabilidade que:

(a) no máximo três *pacotes* não sejam transmitidos
(b) todos sejam transmitidos

32. A probabilidade de haver algum acidente considerado grave em um dia, em um trecho de uma rodovia é de 0,04 se não chove e de 0,12 se chove. Sabe-se que, no período considerado, chove em 30% dos dias.

(a) Se em um determinado dia não houve nenhum acidente, qual a probabilidade que não tenha chovido?
(b) qual a probabilidade de que, chovendo ou não, haja acidente?

33. Considere agora que ocorrem em média 0,8 acidentes graves por semana.

(a) Com a informação disponível, qual distribuição de probabilidades (dentre as vistas no curso) poderia ser adequada para descrever *o número de acidentes semanais na rodovia*? Justifique a sua resposta e mencione quais as suposisões que devem ser feitas ao adotar esta distribuição.
(b) Qual a probabilidade de que haja ao menos um acidente grave em uma semana?

(c) Qual a probabilidade de que não haja acidentes graves em um mês?
(d) Qual a probabilidade de que sejam registrados mais que dois acidentes graves em uma semana?
(e) Qual a probabilidade de que não haja mais do que cinco acidentes graves em um mês?
(f) Sabendo que em um mês houve pelo menos um acidente grave, qual a probabilidade de que ocorram mais que quatro?
(g) Se não houveram acidentes graves até a metade do mês, qual a probabilidade de não haja acidentes no restante do mês.
(h) E se já ocorreu algum acidente na primeira metade do mês?

34. Ainda no contexto da questão anterior:

(a) Qual distribuição poderia ser usada para descrever o tempo entre acidentes graves?
(b) Qual a probabilidade de se passarem 10 dias sem acidentes graves?
(c) Qual o tempo médio entre acidentes graves?
(d) Se não houve acidentes por um período de 5 dias consecutivos, qual a probabilidade de haver um acidente nos próximos 10 dias?

35. Um mecanismo robótico de inserção contém 10 componentes primários. A probabilidade de que qualquer um dos componentes falhe durante o período de garantia é de 0,03. Assume que as falhas dos componentes são independentes e o mecanismo falha se qualquer um dos componentes falharem.

(a) Qual a probabilidade de que o mecanismo falhe durante o período de garantia?
(b) Qual deveria ser a probabilidade individual de falha dos componentes para que a probabilidade de falha do mecanismo não ultrapassasse 0,05?

36. Seja a função de densidade de probabilidade dada por $f(x) = Cx^2 I_{[0,4]}(x)$. Obtenha:

(a) o valor de C,
(b) $P[X > 0,5]$,
(c) $P[X > 0,7 | X > 0,5]$,
(d) $E(X)$,
(e) o terceiro quartil.

37. Uma editora envia livros de divulgação com caixas com três unidades. O peso individual dos livros tem distribuição normal de média 400 gramas e desvio padrão de 60 gramas e a caixa pesa 200 gramas. Se os livros são escolhidos ao acaso, calcule:

(a) a probabilidade de que uma caixa a ser enviada pese mais que 1,5 quilos;
(b) o custo esperado para envio de 1.000 caixas sabendo-se que paga-se R$5,00 para caixas acima de 2,0 quilos, R$3,00 para caixas entre 1,0 e 2,0 quilos, e R$ 2,00 para caixa abaixo de 1,0 quilo.

38. Em um grupo de estudantes 45% são do curso A, 25% do curso B o restante do curso C. A proporção de mulheres em cada curso um dos cursos é de 20, 50 e 75%, respectivamente. Se um estudante é sorteado qual a probabilidade de:

(a) seja homem;
(b) seja do curso A, sabendo que foi sorteada uma mulher;
(c) seja do curso C sabendo que foi sorteado um homem.

39. A probabilidade de ocorrer falha/corrupção na cópia de um arquivo é de 0,03. Em 10.000 cópias feitas em um sistema mostre como calcular as probabilidades a seguir de ao menos duas maneiras diferentes.

(a) De que não ocorram falhas;
(b) de que ocorram o máximo três falhas;

(c) de que ocorram no máximo quatro falhas, sabendo que ao menos uma falha ocorreu.

40. Considere a função $f_X(x) = k(1 + 2x)\ \mathrm{I}_{(0,2)}(x)$

- mostre que $f(x)$ é função de densidade de probabilidade (f.d.p.) para algum valor de k e determine o valor de k.
- obtenha $F(x)$
- obtenha $\mathrm{E}[X]$
- obtenha $P[X > 1]$
- obtenha a tal que $P[X < a] = 0,6$

41. O tempo de montagem de um determinado mecanismo é uma v.a. uniforme no intervalo de 30 a 40 segundos. Determine:

- as expressões de $f(x)$ e $F(x)$;
- a probabilidade da montagem ser feita em menos que 33 segundos;
- a probabilidade da montagem ser feita em menos que 38 segundos, sabendo que foi maior que 35 segundos;
- o tempo abaixo do qual 80% das montagens são feitas;
- o tempo esperado para montagem de 5.000 peças;
- o custo esperado para montagem de 5.000 peças sabendo que montagens abaixo de 33 segundos tem custo de R$1,00, entre 33 e 38 segundos o custo é de R$1,50 e acima de 38 segundos o custo é de R$3,00.

42. Uma central de atendimento classifica as solicitações de atendimento em 12 categorias (A, B, C, ...K, L) de complexidade. Assume-se que a probabilidade de classificação é a mesma para todas as categorias. Os custos são de R$ 100,00 para categorias A e B; R$ 200,00 para C e D, R$ 300,00 para E e F e R$ 400,00 para os demais. A cada dia são feitos três atendimentos. Qual a probabilidade de que em um dia o custo total:

(a) seja de R$ 600,00 ,

(b) seja de pelo menos R$ 1.000,00 ,

(c) seja de pelo menos R$ 900,00 , sabendo-se que o custo é de pelo menos R$ 600,00 ,

(d) sejam selecionados dois ou mais atendimentos de mesmo custo ,

(e) sejam selecionados três atendimentos de custos diferentes.

(f) Considerando uma semana de 5 dias úteis, qual o custo semanal (total) esperado?

43. Mostre que as funções a seguir são funções de densidade de probabilidade (f.d.p.) para algum valor de k e determine o valor de k.

- $f_1(x) = k_1(1 + 2x)$ para $0 < x < 2$.
- $f_2(x) = k_2x^2$ para $0 < x < 4$.

Obtenha para cada uma das distribuições:

- $F(x)$
- $\mathrm{E}[X]$
- $P[X > 1]$

44. Um lote de 120 containers de laranjas contém 25 que estão contaminados. São selecionados ao acaso e sequencialmente 15 containers para inspeção. Quais as probabilidades de que:

(a) nenhum contaminado seja selecionado?

(b) mais que 2 contaminados sejam encontrados?

(c) de que o segundo inspecionado esteja contaminado sendo que o primeiro era contaminado?

(d) de que os cinco primeiros não sejam contaminados?

45. Em um grupo de estudantes 45% são do curso A, 25% do curso B o restante do curso C. A proporção de mulheres em cada curso um dos cursos é de 20, 50 e 75%, respectivamente. Se um estudante é sorteado qual a probabilidade de:

   (a) seja homem;
   (b) seja do curso A, sabendo que foi sorteada uma mulher;
   (c) seja do curso C sabendo que foi sorteado um homem.

46. Uma empresa é responsável pelo monitoramento de 12 reservatórios (A, B, C, ... K, L) que são inspecionados periodicamente. Os custos de inspeção variam sendo de R$ 1.000,00 para A e B; R$ 2.000,00 para C e D, R$ 3.000,00 para E e F e R$ 4.000,00 para os demais. Em cada inspeção são selecionados aleatoriamente três reservatórios. Qual a probabilidade de que em uma inspeção:

   (a) seja gasto R$ 6.000,00 ,
   (b) seja gasto mais que R$ 10.000,00 ,
   (c) seja gasto mais que R$ 8.000,00 , sabendo-se que o custo é superior a R$ 5.000,00 ,
   (d) sejam selecionados dois ou mais reservatórios de mesmo custo ,
   (e) sejam selecionados reservatórios de custos diferentes ,

47. (B. & M.) Um empreiteiro apresentou orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte de encanamento de um edifício. Ele acha que a probabilidade de ganhar e concorrência da parte elétrica é de 1/2. Caso ganhe a parte elétrica, a chance de ganhar a parte de encanamento é de 3/4; caso contrário, essa probabilidade é de 1/3.

   (a) Qual a probabilidade de ele:
      - ganhar os dois contratos?
      - ganhar apenas um dos contratos?
      - não ganhar nenhum contrato?
   (b) os eventos "ganhar o contrato elétrico" e "ganhar o contrato hidráulico"
      - são independentes? (justifique)
      - são mutuamente exclusivos? (justifique)

48. Considere o lançamento de uma moeda 10 vezes.

   (a) Se voce lançar a probabilidade de obter a face "cara" em todos os lançamentos?
   (b) Considere agora que 1.000 pessoas fazem o mesmo. Qual a probabilidade de que alguém obtenha 10 "caras"?
   (c) Qual(ais) a(s) suposição(ções) feita(s) nos cálculos?
   (d) Discuta e interprete os resultados.

49. Registros de um laboratório mostram que 1 a cada 20 amostras de um determinado material são perdidas por contaminação. Responda cada um dos seguintes items declarando a variável aleatória e a sua distribuição.

   (a) Se forem feitas 15 análises qual a probabilidade de que no máximo uma seja contaminada.
   (b) Em um teste para avaliar a contaminação análises serão feitas sequencialmente até que a primeira contaminada seja encontrada. Quantas análises espera-se fazer? Como voce calcularia a probabilidade de que o esse número de análises não chegue a 5?
   (c) O teste anterior foi repetido porém até que a terceira análise mostrasse contaminação. Em um particular ensaio foram feitas 10 análise desta forma. Qual a probabilidade desta ocorrência?
   (d) Um lote contendo 40 amostras das quais 15 eram contaminadas foi enviado para teste em outro laboratório na qual 12 amostras foram selecionadas ao acaso para testes. Qual a probabilidade de encontrar 3 ou mais contaminadas entre as selecionadas?
   (e) Considere agora que o laboratório faz um grande número de análises por mês e registra uma média de 2,5 casos de contaminação grave. Qual a probabilidade de que em um determinado mês não se registre nenhuma contaminação? E de que seja registradas mais do que 5 contaminações?

50. Conchas de mexilhões de uma certa espécie possuem, em uma certa região, possuem uma relação altura/comprimento com distribuição normal de média 0,5 e desvio padrão de 0,025. Os animais serão classificados de modo que 20% sejam considerados pequenos, 50% como médios e os restantes 30% como grandes. Quais os valores da relação altura/comprimento que definirão as classes de tamanho desejadas?

51. A durabilidade de um tipo de filtro é descrita por uma variável aleatória com distribuição normal de média 60.000 hrs de funcionamento e desvio padrão de 9.000 hrs.

    (a) Se o fabricante garante a duração dos filtros pelas primeiras 47.500 hrs, qual a proporção de filtros que devem ser trocados pela garantia?

    (b) O que aconteceria com a proporção do item anterior se a garantia fosse para as primeiras 45.000 hrs?

    (c) Qual deveria ser a garantia (em hrs) de forma a assegurar que o fabricante trocaria sob garantia no máximo 4% dos filtros?

    (d) Se uma indústria comprar cinco (5) filtros, qual será a probabilidade de utilizar a garantia (de 45.000 hrs) para trocar ao menos um (1) dos filtros?

52. Um algorítmo de classificação deve tentar resolver corretamente dois problemas, A e B. A probabilidade resolver A corretamente é de 0,6. Caso resolva A corretamente, a probabilidade de resolver B corretamente é de 0,85; caso contrário, essa probabilidade é de 0,25.

    (a) Qual a probabilidade de ele:
        - resolver corretamente os dois problemas?
        - resolver corretamente apenas um dos problemas?
        - não resolver nenhum corretamente?

    (b) os eventos ”resolver corretamente A” e ”resolver corretamente B”,
        - são independentes? (justifique)
        - são mutuamente exclusivos? (justifique)

53. Considere o lançamento de uma moeda 10 vezes.

    (a) Qual a probabilidade de obter a face ”cara” em todos os lançamentos?

    (b) Considere agora que 1.000 pessoas fazem o mesmo. Qual a probabilidade de que alguém obtenha 10 ”caras”?

    (c) Qual(ais) a(s) suposição(ções) feita(s) nos cálculos?

    (d) Discuta e interprete os resultados.

54. Responda as questões a seguir declarando a variável aleatória e a sua distribuição.

    (a) Registros de um sistema mostram que 1 a cada 20 requisições de acesso de um determinado serviço não são completadas.

        i. Se forem feitas 15 requisições qual a probabilidade de que no máximo duas não sejam completadas.

        ii. Em um teste para avaliar o sistema requisições serão feitas sequencialmente até que a primeiro acesso não seja completado. Se este teste for feito diversas vezes, anotando-se o número de acessos a cada teste, qual deve ser o valor da média do número de acessos? Como voce calcularia a probabilidade de que o esse número de acessos não chegue a 5?

        iii. O teste anterior foi repetido porém até que o terceiro acesso não fosse completado. Em um particular ensaio foram feitas 10 análise desta forma. Qual a probabilidade desta ocorrência? Se este teste for repetido diversas vezes e o número de acessos anotado, qual deve ser a média do número de acessos?

55. Tem-se um conjunto de 40 sensores das quais 15 estão danificados. Uma transmissão é feita para 12 sensores foram selecionadas ao acaso. Qual a probabilidade da transmissão ter sido enviada para 4 ou mais sensores operantes?

56. Considere agora uma transmissão de dados que tem uma taxa de falha de 5,2 falhas por hora. Qual a probabilidade de que em um intervalos de 15 minutos não haja nenhuma falhas de transmissão? E de que seja registradas mais do que 4 falhas?

57. O peso de um tênis de corrida sofisticado é normalmente distribuído com média de 12 onças (onça é uma unidade de peso) e desvio padrão de 0,5 onças.

   (a) qual a probabilidade de um tênis pesar mais que 13,2 onças?
   (b) qual a probabilidade de um tênis pesar entre 11,6 e 12,7 onças?
   (c) quanto deveria ser o desvio padrão para que 99,9% dos tênis tenham menos que 13 onças?
   (d) se o desvio padrão se mantiver em 0,5, quanto deveria ser a média para que 99,9% dos tênis tenham menos que 13 onças?

58. Um teste de aptidão feito por pilotos de aeronaves em treinamento inicial requer que uma série de operações seja realizada em uma rápida sucessão. Suponha que o tempo necessário para completar o teste seja distribuído de acordo com o modelo normal, com média de 90 minutos e desvio padrão de 20 minutos.

   (a) Para passar no teste, o candidato deve completá-lo em menos de 80 minutos. Se 65 candidatos tomam o teste, quantos são esperados passar?
   (b) Se os 5% melhores candidatos são alocados para aeronaves maiores, quão rápido deve ter sido o candidato para que obtenha esta posição?
   (c) Se forem sorteados ao acaso 5 candidatos, qual a probabilidade de tomar ao menos 2 aprovados?

59. Um time de futebol tem probabilidade 0,70 de vitórias sempre que joga. Se o time atuar 4 vezes determine a probabilidade de que vença:

   (a) todas as 4 partidas.
   (b) exatamente 2 partidas.
   (c) pelo menos uma partida.
   (d) no máximo 3 partidas.
   (e) mais da metade das partidas.

60. Considere agora que o time tem probabilidade 0,7 de vitória, 0,25 de empate e 0,05 de perder quando joga em casa e 0,5 de vitória, 0,3 de empate e 0,2 de derrota quando joga fora. O time ganha 3 pontos quando vence, 1 quando empata e não marca pontos quando perde. Se vai jogar uma partida em casa e uma fora, qual a probabilidade de:

   (a) não marcar pontos,
   (b) marcar 4 pontos,
   (c) marcar 6 pontos.
   (d) qual o número esperado de pontos marcados em um par de partidas sendo uma em casa e outra fora. Como este resultado deve ser interpretado?

61. Certo tipo de fusível tem duração de vida que segue uma distribuição (f.d.p.) exponencial com tempo médio de vida de 100 horas. Cada peça tem um custo de 10,0 unidades monetárias (u.m.) e se durar menos de 20 horas, existe um custo adicional de 8,0 u.m..

   (a) Qual é a probabilidade de uma durar mais de 150 horas?
   (b) Qual é a probabilidade de uma durar entre 50 e 120 horas?
   (c) Qual é a probabilidade de uma durar mais de 250 horas sabendo que já durou mais que 100 horas?
   (d) Determinar o custo esperado de um lote de 10.000 peças.

62. Um vendedor de automóveis sabe que o número de carros vendidos por dia em sua loja comporta-se como uma variável de Poisson cuja média é 2,2 nos dias de bom tempo, e de 0,9 nos dias chuvosos. Se em 65% dos dias faz bom tempo, qual é a probabilidade de que:

   (a) não seja vendido nenhum automóvel em um certo dia.
   (b) em certo dia do ano sejam vendidos pelo menos três automóveis.

63. Sabe-se que com determinado tratamento alcança 60% de curas para certa doença quando o mesmo é administrado a pacientes em condições bem definidas. Se tratamento for aplicado a 20 pacientes nessas condições, qual é probabilidade de que:

    (a) Ocorram no máximo 5 curas?
    (b) Ocorram no mínimo 9 e no máximo 11 curas ?
    (c) Qual é o número esperado de curas? E qual a variância?

64. O tempo de duração(em anos) de certo microprocessador, é considerado uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade $f(x) = e^{-\frac{x-k}{10}} \mathrm{I}_{[2,\infty]}(\mathrm{x})$.

    (a) Determine a constante k para que $f(x)$ seja uma função de densidade de probabilidade.
    (b) Determine e interprete $E(X)$ e $Var(X)$;
    (c) Qual é a probabilidade de um microprocessador dure mais de 5 anos em uma escolha aleatória?
    (d) Determine a função de distribuição acumulada da variável tempo de vida.
    (e) Se um microprocessador já está em funcionamento por 7 anos, qual é a probabilidade que dure outros 2 anos?

65. O tempo de afastamentos por motivo de saúde solicitadas em um orgão público em um mês tem distribuição normal de média 250 horas e desvio padrão de 25 horas. Qual a probabilidade de que o tempo de afastamento no próximo mês:

    (a) fique entre 200 e 300 horas;
    (b) não ultrapasse 280 horas;
    (c) se afaste de média por mais de 40 horas.

    Qual o tempo de afastamento que

    (d) é superado com probabilidade de apenas 0,05;
    (e) deve se superado em 90% dos meses.

66. O tempo de atendimento a usuários em uma central de atendimento tem distribuição normal de média 12 minutos de desvio padrão de 2 minutos. Qual a probabilidade de que uma chamada dure:

    (a) dure menos que 10 minutos;
    (b) mais que 15 minutos.

67. Em um mercado, três corretoras, A, B e C são responsáveis por 20, 50 e 30% do volume total de contratos negociados, respectivamente. Do volume de cada corretora, 20, 5 e 2% respectivamente, são contratos futuros em dólares. Um contrato é escolhido ao acaso e verifica-se que é futuro em dólares. Qual a probabilidade de ter sido negociado pela corretora A ? E pela corretora C ?

68. A probabilidade de um programador cometar um erro de sintaxe em uma primeira versão de seu trabalho é de 2/5. Caso cometa o erro de sintaxe, a probabilidade de comentar um erro de lógica é de 7/10, caso contrário essa probabilidade é de 1/4. Calcule a probabilidade de ele:
    (a) cometer os dois erros, (b) cometer apenas um dos erros, (c) não cometer erros.

69. O tempo de afastamentos por motivo de saúde solicitadas em um orgão público em um mês tem distribuição normal de média 250 horas e desvio padrão de 25 horas. Qual a probabilidade de que o tempo de afastamento no próximo mês:

    (a) fique entre 200 e 300 horas;
    (b) não ultrapasse 280 horas;
    (c) se afaste de média por mais de 40 horas.

    Qual o tempo de afastamento que

(d) é superado com probabilidade de apenas 0,05;

(e) deve se superado em 90% dos meses.

70. Dizemos que uma variavel aleatória tem distribuição triangular no intervalo $[0; 1]$ se sua densidade é dada por: $f(x) = cx$ para $0 \leq x \leq 1/2$, $f(x) = c(1 - x)$ para $1/2 < x \leq 1$, e $f(x) = 0$ para os demais valores de x.

    (a) Determine o valor da constante c.

    (b) Calcule $P(X > 8/10)$.

    (c) Calcule $P(1/4 < X < 3/4)$.

    (d) Obtenha os quartis da distribuição de X.

    (e) Calcule $P(X < 3/4|X \geq 1/3)$

71. Um colégio tem em seu corpo docente sete professores de Biológicas, oito professores de Exatas e nove professores de Humanas. Uma comissão de sete professores será selecionada aleatoriamente. Determine a probabilidade de que nesta comissão haja pelo menos um professor de cada área?

72. No problema anterior suponha agora que a comissão será de 3 professores e estamos interessados no número de professores de exatas nesta comissão. Obtenha a distribuição de probabilidades dessa v.a.

73. Uma fábrica de sorvete recebe o leite que utiliza de três linhas de fornecimento: 20% da linha A, 30% da linha B e 50% da linha C. Um órgão de fiscalização inspecionou as linhas e constatou que 20% dos galoões de leite de linha A estavam adulterados por adição de água, enquanto que para as fazendas B e C essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente. A fábrica de sorvete recebe o leite em galões, que são armazenados em um refrigerador, sem identificação da linha de proveniência. Um galão é escolhido ao acaso e seu conteúdo é testado para verificar adulteração.

    (a) Qual a probabilidade de que o galão contenha leite adulterado?

    (b) Sabendo que o teste constatou que o leite do galão está adulterado, obtenha a probabilidade de que o galão seja proveniente da linha A?

74. Considere que um time de futebol tem probabilidade 0,7 de vitória, 0,25 de empate e 0,05 de perder quando joga em casa e 0,5 de vitória, 0,3 de empate e 0,2 de derrota quando joga fora. O time ganha 3 pontos quando vence, 1 quando empata e não marca pontos quando perde. Se vai jogar uma partida em casa e uma fora, qual a probabilidade de:

    (a) não marcar pontos,

    (b) marcar 4 pontos,

    (c) marcar 6 pontos.

    (d) qual o número esperado de pontos marcados em um par de partidas sendo uma em casa e outra fora. Como este resultado deve ser interpretado?

75. João e Maria estão fazendo um curso de matemática onde as notas são dadas em conceitos A, B ou C. A probabilidade de João ter conceito B é 0,3 e a de Maria é de 0,4. A probabilidade de que nenhum deles tenha um A mas ao menos um tenha B é de 0,1. Qual o probabilidade de que ao menos um tenha um B menos nenhum tenha um C?

76. Acredita-se que numa certa população, 20% de seus habitantes sofrem de algum tipo de alergia e são classificados como alérgicos para fins de saúde pública. Sendo alérgico, a probabilidade de ter reação a um certo antibiótico é 0,5. Para os não alérgicos essa probabilidade é de apenas 0,05. Uma pessoa dessa população teve reação ao ingerir o antibótico, qual a probabilidade de:
    a) ser do grupo não alérgico? b) ser do grupo alérgico?

77. Seja X uma variável aleatória com densidade $f(x) = \kappa\, x^2\, I_{[-1,1]}(x)$.

    (a) Determine o valor da constante κ.

    (b) Calcule $P(|X| > 1/2)$.

(c) Ache o valor de A tal que $F(A) = P(X \leq A) = 1/4$.
(d) Calcular $E(X)$.

78. Laminas de metal apresentam defeitos no cromado, segundo uma distribuição de Poisson, com uma média de 0,8 defeito por m^2. Essas laminas são usadas para construção de janelas para uma instalação industrial cuja dimensões são de 150×200 cm.

    (a) Qual o número esperado de falhas por janela?
    (b) Qual a probabilidade de uma janela não apresentar defeito?
    (c) Sabendo que uma janela tem defeito(s) qual a probabilidade de ter mais que um defeito?
    (d) Em um grupo 10 dessas janelas qual é a probabilidade de que no máximo 2 delas não tenha nenhum defeito?
    (e) Em 500 lotes de 3 janelas, quantos espera-se que não apresentem nenhuma janela com defeito?

79. Um time de futebol tem probabilidade 0,70 de vitórias sempre que joga. Se o time atuar 4 vezes determine a probabilidade de que vença:

    (a) todas as 4 partidas.
    (b) exatamente 2 partidas.
    (c) pelo menos uma partida.
    (d) no máximo 3 partidas.
    (e) mais da metade das partidas.

80. Em uma fábrica, a máquina A produz por dia o triplo de peças que a máquina B e, a máquina C o quádruplo da máquina A. Sabe-se que 6% das peças fabricadas pela máquina A tendem a ser defeituosas, 4% das peças produzidas pela máquina B tendem a ser defeituosas, enquanto 8% de peças defeituosas da máquina C. A produção diária de todas as máquinas é misturada. Extraída uma amostra aleatória (com reposição) de 20 peças, qual é a probabilidade de que essa amostra contenha:

    (a) No máximo duas peças defeituosas?
    (b) Entre três e cinco peças defeituosas?
    (c) Se uma peça é defeituosa, qual a probabilidade de ter vindo da máquina A?

81. Um exame de múltipla escolha consiste em 10 questões, cada uma com cinco possibilidades de escolha. A aprovação exige no mínimo 50%. Qual a chance de aprovação, se:

    (a) O candidato comparece ao exame sem saber absolutamente nada, apelando apenas para o palpite.
    (b) O candidato tem um conhecimento parcial do conteúdo, suficiente para poder eliminar três escolhas, devendo então apenas entre as duas escolhas restantes.

82. O Departamento de Matemática é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída, sorteando-se, ao acaso, três membros do departamento.

    (a) Qual a probabilidade a comissão ser formada somente por homens?
    (b) Qual a probabilidade a comissão ser formada por pelo menos duas mulheres?
    (c) O valor esperado e variância do número de mulheres na comissão.
    (d) A função de distribuição acumulada.

83. Uma pessoa está discando um número de telefone e conhece todos os dígitos, mas esqueceu-se somente da ordem dos últimos três (que são algarismos diferentes). Essa pessoa disca, variando aleatóriamente esses três últimos dígitos, até encontrar o número correto. Admitindo que não repita números discados, qual é a probabilidade de ser necessário discar 5 números errados antes de acertar?

84. Ainda no contexto da questão anterior, assuma agora que a pessoa não sabe quais são os 3 últimos dígitos e resolve tentar aleatoriamente podendo ainda repetir o número discado.

- qual a probabilidade de conseguir em, no máximo 4, tentativas?
- qual seria o número esperado de tentativas para se conseguir discar o número correto?

85. Para cada uma das funções abaixo diga se é uma f.d.p. (função de densidade de probabilidade) válida justificando a resposta.

    a) $f(x) = 1 - x \ ; \ 0 < x < 2$
    b) $f(x) = (1/2)\exp\{-x/2\} \ ; \ 0 < x < +\infty$
    c) $f(x) = 3\,x^2 \ ; \ -1 < x < 0$
    d) $f(x) = |x - 1|/2 \ ; \ 0 < x < 2$
    e) $f(x) = 1/10 \ ; \ -0,1 < x < 0,1$

86. Na comunicação entre servidores, uma mensagem é dividida em n pacotes, os quais são enviados na forma de códigos. Pelo histórico da rede sabe-se que cada pacote tem uma probabilidade de 0,01 de não chegar corretamente a seu destino, e além disto, assume-se que o fato de um pacote chegar ou não corretamente ao destino não altera a probabilidade de chegada correta de outros pacotes. Um programa corretivo, garante o envio correto da mensagem quando o número de pacotes enviados erroneamente não passar de 10% do total de pacotes da mensagem.

    (a) Qual a probabilidade de uma mensagem composta de 20 pacotes ser enviada corretamente?
    (b) e para uma mensagem de 200 pacotes?

87. O tempo para que um sistema execute determinada tarefa é uma variável aleatória com distribuição normal, com média de 320 segundos e desvio padrão de 8 segundos.

    (a) qual a probabilidade da tarefa ser executada em menos que 300 segundos?
    (b) qual a probabilidade da tarefa ser executada em mais que 330 segundos?
    (c) qual o tempo abaixo do qual espera-se executar 90% das tarefas?
    (d) cobra-se 5 centavos por tarefas executadas em menos que 310 segundos, 3 centavos entre 310 e 325 segundos e não se cobra para tarefas executadas acima de 325 segundos. Qual o valor esperado do pagamento por 100.000 tarefas executadas?