Algebra e σ-Álgebras

Gledson Luiz Picharski

26 de agosto de 2007

1 Álgebra

É definido por Álgebra de subconjuntos de Ω, um conjunto F qualquer, que seja subconjunto do espaço amostral Ω não-vazio e satisfaça as seguintes propriedades:

A1) $\Omega \in F$

A2) Se $A \in F$, então $A^c \in F$.

A3) Se $A \in F$ e $B \in F$, então $A \cup B \in F$.

A partir dessas podemos observar que uma Álgebra de conjuntos também seguirá as propriedades a seguir:

A4) $\emptyset \in F$

A5) Se $A_i \in F, i \geq 1$, então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F$.

em consequência desta definição podemos partir para um caso especifico no seguinte tópico.

2 σ-Álgebra

Uma σ-Álgebra, também conhecida por algebra de Borel, é um caso particar de algebra, então são validas as mesmas propriedades, mas com uma modificação em A3, a união deve ser verificada "exaustivamente", ou seja de forma a que todas as possiveis uniões venham a pertencer ao conjuto(que neste caso chamei de F), ficamos então com as seguintes propriedades:

B1) $\Omega \in F$

B2) Se $A \in F$, então $A^c \in F$.

B3) Se $A_i \in F, i \geq 1$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

Isto pode ser verificado em varios tipos de conjuntos, é valido para o caso continuo e discreto, podendo ser $\Omega = [0, 1]$ por exemplo, e apartir dele extrair a σ-Algebra de conjuntos, um exemplo no caso discreto seria:

$\Omega\{a, b, c\}$, onde $a, b, c \in Z$

$A_1 = \{\emptyset, \Omega, a, \{b, c\}\}$
$A_2 = \{\emptyset, \Omega, a, , b, c, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

A_1 e A_2 são duas σ-Álgebras possiveis, é possivel verificar isto através das propriedades citadas. Uma σ-Álgebras pode ser formada pelo conjunto de todos os subconjuntos de Ω, este é o conjunto de partes de Ω e sempre possuirá 2^n elementos, assim como ocorre com o conjunto A_2.

Percebemos que a verificação de uma σ-Álgebras pode ser feita verificando a intersecção, a união e a complementariedade dos elementos do conjunto.

Bibliografias

– Probabilidade e Variáveis Aleatórias - Marcos Nascimento Magalhães - 2ª edição edusp

– Probabilidade:um curso em nivel intermediário - Berry r. James - 3ª edição impa

Links

– σ-Álgebra na wikipedia

– σ-Álgebra at encyclopedia of science and philosophy