

GRADUAÇÃO BAYESIANA DE TAXAS DE MORTALIDADE



Guerino Pirollo Junior

guerino@fundacaocopel.org.br/gpj@onda.com.br

Introdução

- ❑ As tábuas de mortalidade são fundamentais nas cias. de previdência e seguros, pois são os elementos que contém as probabilidades teóricas (taxas de mortalidade) de morte/vida por intervalo de idade, as quais são usadas nos cálculos de provisões matemáticas, rendas aleatórias, contribuições previdenciárias e prêmios, nos planos de previdência e seguros.
- ❑ A não aderência de uma tábua de mortalidade, pode provocar desequilíbrio atuarial/financeiro a uma cia. em decorrência do mal dimensionamento das provisões matemáticas (subestimadas/superestimadas), dentre outros problemas, devido à falta de conhecimento sobre a mortalidade da população exposta ao risco.

Introdução

- ❑ O mercado de previdência e seguros no Brasil se baseia nas experiências estrangeiras (tabuas americanas, holandesas, inglesas e etc), que nem sempre refletem bem a realidade brasileira.
- ❑ O ideal seria adotar uma mortalidade baseada na própria experiência, através de tábuas que contenham taxas de mortalidade que reflitam a realidade da população exposta ao risco, ou então, a que mais se aproximar dela.

Objetivo

- ❑ O propósito deste trabalho é obter, através de dados coletados de uma população de inativos exposta ao risco e, utilizando a estatística “Bayesiana”; probabilidades de morte que reflitam a real mortalidade da população estudada.
- ❑ Para obtenção das probabilidades de mortes, será utilizado o processo de “Graduação (suavização) Bayesiana” das taxas brutas de mortalidade, através de um modelo bayesiano não paramétrico, implementado via MCMC usando o amostrador de Gibbs, no pacote computacional JAGS (*Just Another Gibbs Sampler*).
- ❑ Após obtenção das probabilidades de morte resultantes (já graduadas), estas serão comparadas com probabilidades de tábuas conhecidas e praticadas no mercado brasileiro, afim de verificar se estão defasadas.

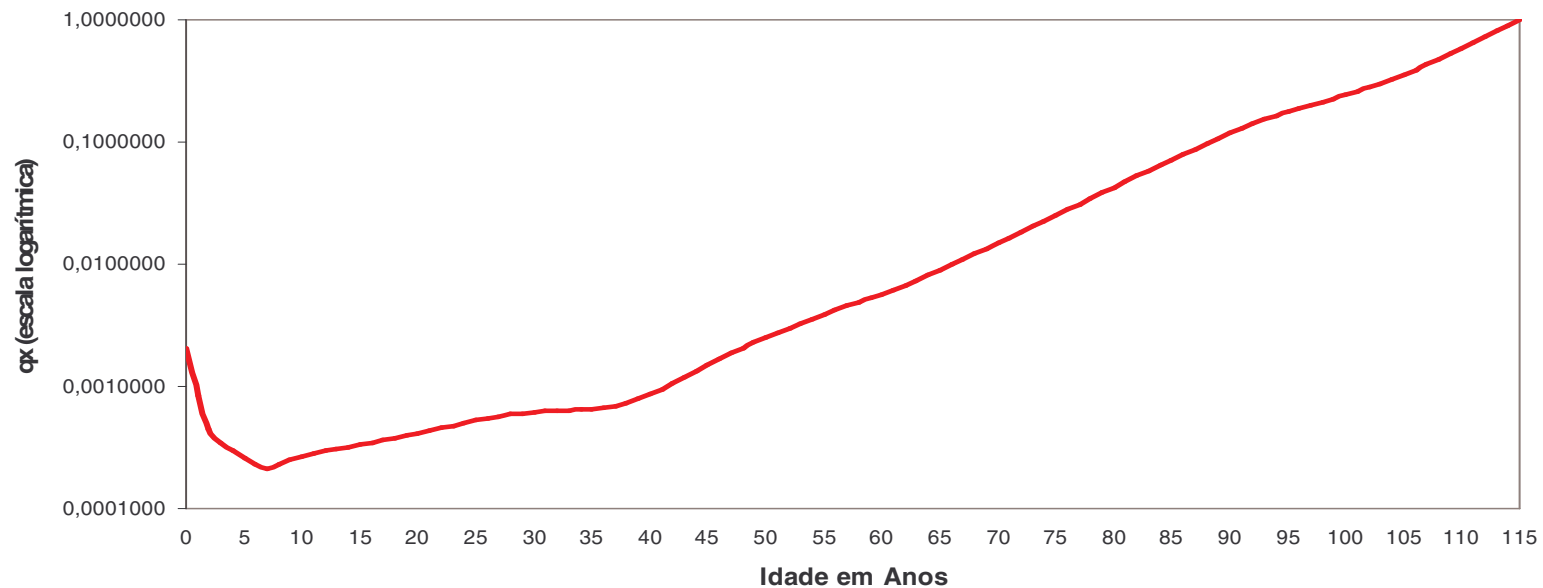
Metodologia

- ❑ Para cada ano de estudo, observou-se o número de expostos ao risco no início do ano (l_x), para cada idade x .
- ❑ Observou-se também a cada ano de estudo, o número de mortes ocorridas em cada idade x (d_x), obtendo-se as taxas brutas de mortalidade nas respectivas idades:
 - $r_x = d_x / l_x$
- ❑ Após obtenção das taxas brutas (r_x), estas são graduadas em função da força de mortalidade (μ_x), a qual mede a variação instantânea da intensidade de morte, obtendo-se probabilidades anuais de morte (q_x).

Metodologia

- As probabilidades anuais de morte são “monotonicamente crescentes” a partir de certa idade, pois a mortalidade humana se comporta desta forma a partir de certa idade.

Probabilidades de Morte em Relação à Idade - AT2000



Modelagem

- Assume-se que a variável aleatória “número de mortes na idade x ” (d_x), é distribuída segundo uma Poisson com média $\lambda_x = l_x \cdot \mu_x$, assim $d_x \sim \text{Poisson}(\lambda_x)$. As quantidades l_x são constantes conhecidas
- A força de mortalidade (μ_x) não é constante a cada momento, desta forma, considerando $f(x)$ a f.d.p. da variável aleatória X (idade de morte de um recém nascido), temos:

$$\mu_x = P(x < X < x + \Delta x \mid X > x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)\Delta x}{1 - F(x)}$$

então

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{-s'(x)}{s(x)}$$

Modelagem

- Da Matemática Atuarial, temos que a relação entre a força de mortalidade (μ_x) e a probabilidade de morte (q_x) (Gerber, 1997), é dada por:

$${}_nq_x = 1 - \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+t} dt\right), \text{ portanto } q_x = 1 - \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+t} dt\right)$$

- Uma simplificação proposta por Broffit (1988), foi considerar μ_x constantes nos intervalos de idade $i=1, 2, \dots, k$, a partir de uma idade inicial x , assim, $\mu_y = \theta_i$ para $x+i-1 < y < x+i$, logo $q_{x+i-1} = 1 - \exp(-\theta_i)$, e portanto:
 - $\theta_i = -\ln(1 - q_{x+i-1})$
- Finalmente: $d_x \sim \text{Poisson}(\lambda_x)$, com $\mu_x = \theta_i$, onde θ_i é um parâmetro não observável, o qual segue uma determinada distribuição a "priori".

Modelagem

- Broffit (1988), para graduar as taxas brutas de mortalidade, impôs a restrição $\mathbf{R}_I = \{\theta: 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_k\}$ ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ não observáveis. Essa restrição à distribuição a “*priori*”, assegura que os estimadores bayesianos também estarão restritos a \mathbf{R}_I .
- O N° de mortes no intervalo de idade $x+i-1$ (\mathbf{d}_i) tem distribuição Poisson ($\boldsymbol{\lambda}_i$) (pressupondo $\lambda_i = e_i \cdot \theta_i$), onde x é a 1ª idade estudada, apresentando a seguinte função de verossimilhança:

$$l(\mathbf{d}_i | \boldsymbol{\theta}_i) = \prod_{i=1}^k \left[\frac{\exp(l_i \cdot \theta_i) \cdot (l_i \cdot \theta_i)^{d_i}}{d_i!} \right], \text{ ou } l(\mathbf{d}_i | \boldsymbol{\theta}_i) \propto \prod_{i=1}^k \theta_i^{d_i} \cdot \exp(-l_i \cdot \theta_i)$$

Modelagem

- É natural supor *prioris* Gama para os parâmetros θ_i 's, uma vez que só assumem valores reais positivos. Embora *prioris* Gama conjuguem com a verossimilhança Poisson, no modelo proposto esta facilidade perde-se pela restrição imposta pelo subconjunto \mathbf{R}_I ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$. Assim, a distribuição a priori fica:

$$\theta_i \sim \text{Gama}(\alpha_i, \beta_i) \cdot I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i), \text{ onde}$$

$$\begin{cases} I(\theta_i) = 1, \text{ se } \theta_{i-1} < \theta_i < \theta_{i+1} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- Devido às dificuldades computacionais à época, Broffit (1988) abandonou esta classe de *priori* e adotou uma reparametrização do modelo.

Modelagem

- Carlin (1992), apresentou-se como “facilitador” da graduação bayesiana, pois com a utilização de MCMC tornou-se viável computacionalmente a especificação da *priori* do modelo de Broffit (1988), com a devida restrição, evitando uma complexa integração numérica para estimação dos parâmetros θ_i 's.
- Carlin (1992), realizou pequenas alterações no subconjunto de restrições R_I e na distribuição a *priori* das forças de mortalidade:

1) Acrescentou um limite máximo para a força de mortalidade

$$\underline{\theta} \in R_I = \{\theta : 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_k < B\};$$

2) Considerou os $\theta_1, \dots, \theta_k \stackrel{iid}{\sim} \text{Gama}(\alpha, \beta)$, restrita ao R_I , com α , conhecido e constante e β um hiperparâmetro $\sim \text{Gama}(a, b)$

Implementação

Modelo de Carlin modificado (β fixo)

- Primeiramente, o modelo de Carlin(1992) foi implementado para a população inativa (aposentados) de uma Fundação, onde:
 - Idade inicial $x=48$ anos, com intervalos de idade $x+i-1$ para $i=1,\dots,37$
 - Utilizou-se a quantidade inicial de expostos ao risco (I_x), devido ao rigoroso controle de movimentação da população exposta.
 - Período de observação: Janeiro/2003 a janeiro/2008 (5 anos) - devido à pouquíssima quantidade de dados, houve dificuldades na observação de óbitos em determinadas idades, aumentando-se o período de observação até que ocorressem óbitos em tais idades.

Implementação

Modelo de Carlin modificado (β fixo)

- $\mathbf{R}_I = \{\theta : 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{37} < B\}$, com limite máximo $B=1$

- Função de Verossimilhança dada por:

$$l(d_i | \theta_i) \propto \prod_{i=1}^{37} \theta_i^{d_i} \cdot \exp(-l_i \cdot \theta_i)$$

- Distribuição a priori do vetor de parâmetros θ :

$$P(\underline{\theta} | \alpha, \beta) \propto \prod_{i=1}^{66} \theta_i^{\alpha-1} \exp(-\beta \cdot \theta_i) I_{R_I}(\underline{\theta}), \text{ onde}$$

$$\begin{cases} I_{R_I}(\underline{\theta}) = 1, \text{ se } \underline{\theta} \in R_I \\ I_{R_I}(\underline{\theta}) = 0, \text{ se } \underline{\theta} \notin R_I \end{cases}$$

- Distribuição conjunta dos parâmetros e dos dados:

$$P(\underline{d}_i, \underline{\theta} | \alpha, \beta) \propto \prod_{i=1}^{37} \theta_i^{d_i} \exp(-l_i \cdot \theta_i) \cdot \prod_{i=1}^{37} \theta_i^{\alpha-1} \exp(-\beta \cdot \theta_i) I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i), \text{ onde}$$

$$I_{(\theta_{i+1}, \theta_{i-1})} = 1, \text{ se } \theta_{i-1} < \theta_i < \theta_{i+1}, \text{ e } I_{(\theta_{i+1}, \theta_{i-1})} = 0, \text{ caso contrário}$$

Implementação

Modelo de Carlin modificado (β fixo)

- Distribuição (a *posteriori*) Condicional Completa do parâmetro θ_i , considerando os demais parâmetros:

$$P(\theta_i | d_i, \alpha, \beta) = P(d_i | l_i, \theta_i) \cdot P(\theta_i | \alpha, \beta) \cdot I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i)$$

$$P(\theta_i | d_i, \alpha, \beta) \propto \theta_i^{(d_i + \alpha) - 1} \cdot \exp[-\theta_i(l_i + \beta)] \cdot I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i)$$

por tanto

$$P(\theta_i | d_i, \alpha, \beta) \sim \text{Gama}(\alpha_i^*, \beta_i^*) \cdot I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i), \text{ com } \alpha_i^* = d_i + \alpha \text{ e } \beta_i^* = \beta + l_i$$

- Obtenção das estimativas das forças de mortalidades (θ_i^r) e probabilidades de mortes (q_x^r), a partir de distribuição preditiva do número de mortes (d_i^{rep}), dado o parâmetro θ_i já graduado:

$$(d_i^r | \lambda_i) \sim \text{Poisson}(l_i \cdot \theta_i), \text{ onde}$$

$$\theta_i^r = \frac{d_i^r}{l_i^r} \text{ e } q_{x+i-1}^r = 1 - \exp(-\theta_i^r), \text{ para } i = 1, \dots, 37 \text{ e } x = 48$$

Implementação

Modelo de Carlin modificado (β fixo)

□ Resumo do modelo “Bayesiano”:

- $(d_i | \lambda_i) \sim \text{Poisson}(l_i \cdot \theta_i)$, l_i constantes conhecidas e $i=1, \dots, 37$
- $(\theta_i | \alpha, \beta) \sim \text{Gama}(\alpha, \beta) I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i)$, com $\theta_0=0$ e $\theta_{38}=1$, sendo $\alpha=\beta=0,001$
- $(\theta_i | d^i, \alpha, \beta) \propto \text{Gama}(\theta_i | \alpha_i^*, \beta_i^*) I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i)$
- Predição dada por $q_{x+i-1}^{(r)} = 1 - \exp(-\theta_i^{(r)})$, sendo $\theta_i^{(r)} = d_i^{(r)} / l_i$ onde $(d_i^{(r)} | \lambda_i) \sim \text{Poisson}(l_i \cdot \theta_i)$

Implementação

Modelo de Carlin modificado ($\beta=1$ fixo)

- Dados e valores iniciais na simulação:
 - Os valores iniciais dos parâmetros θ_i 's ($\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_{37}^{(0)}$), obedecendo a restrição \mathbf{R}_I , calculados a partir das tábuas AT2000, AT83 e AT49, onde $\theta_i = -\ln(1 - q_{x+i-1})$, para $i=1, \dots, 37$
 - O número de simulações estocásticas: 120000
 - Aquecimento (burn in): 60000
 - Intervalo entre observações ("thin"): de 6 em 6
 - N° de cadeias paralelas simuladas: 3 cadeias, para as forças de mortalidade das três tábuas
 - Estimadores pontuais das probabilidades de morte futuras:

$$\hat{q}_{x+i-1}^r = \frac{1}{n-m} \sum_{r=m+1}^n q_{x+i-1}^r, \text{ onde:}$$

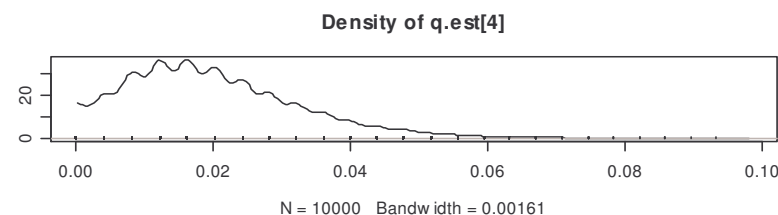
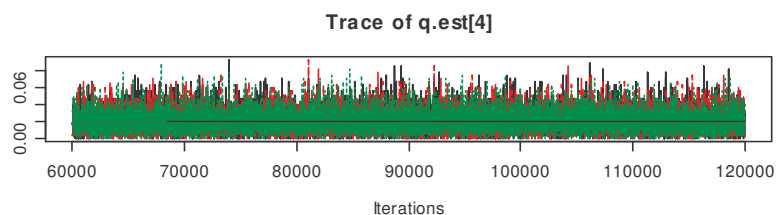
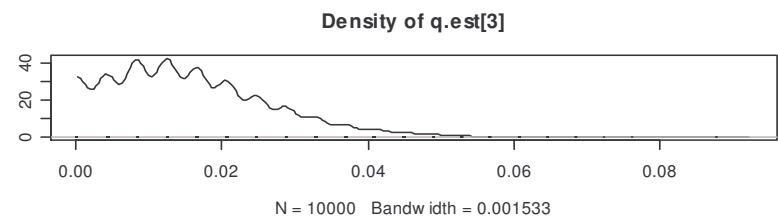
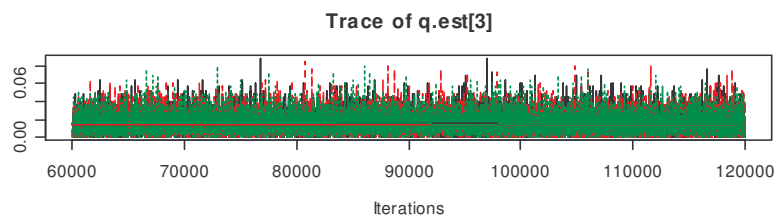
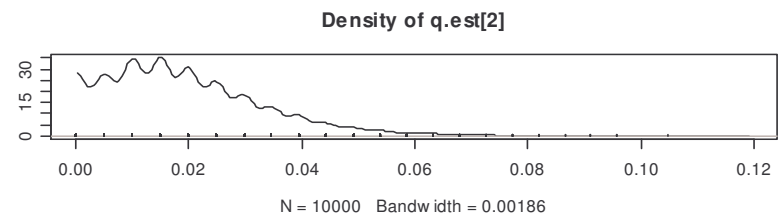
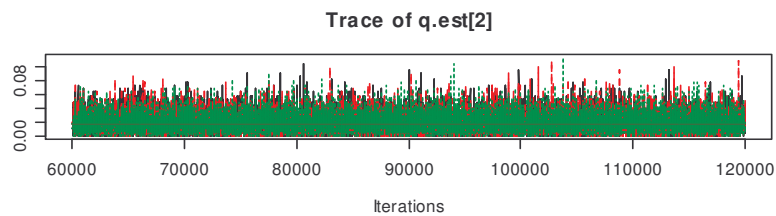
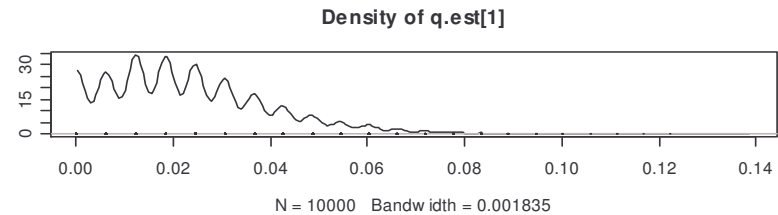
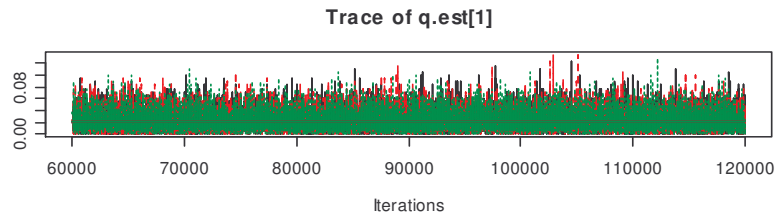
$$i = 1, 2, \dots, 37$$

$$m = 60000 \text{ (burn in)}$$

$$n = 120000 \text{ (total de iterações)}$$

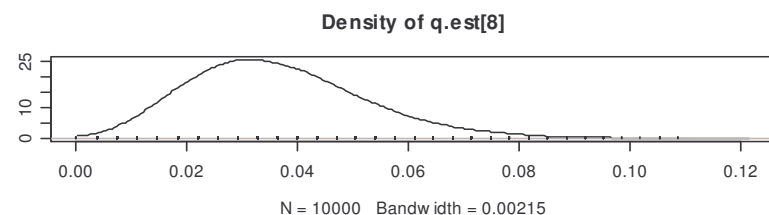
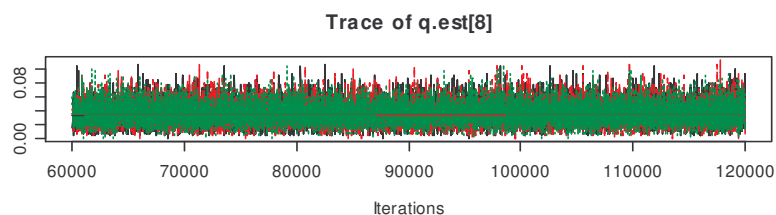
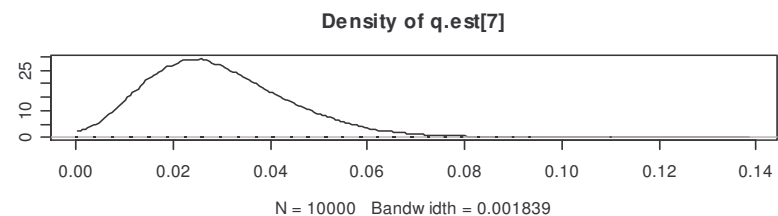
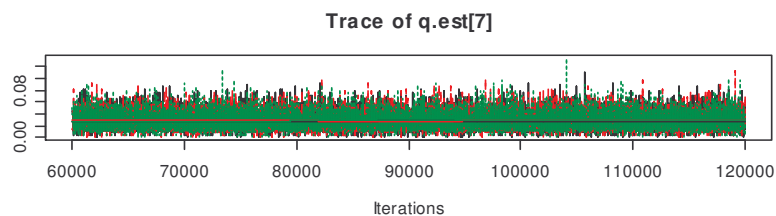
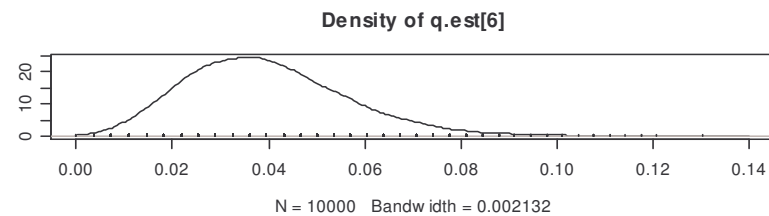
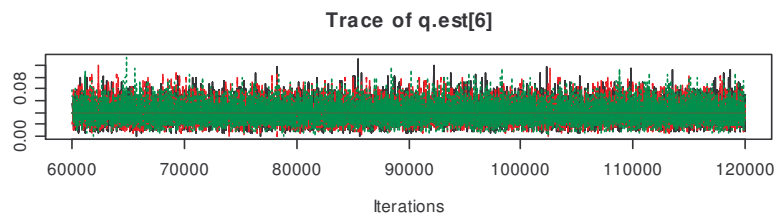
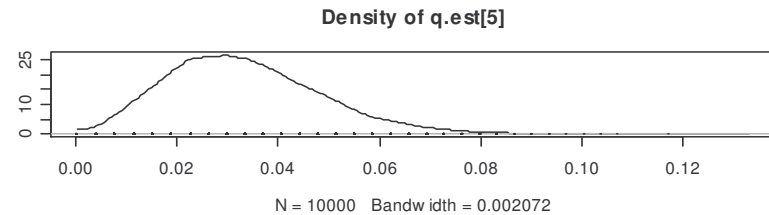
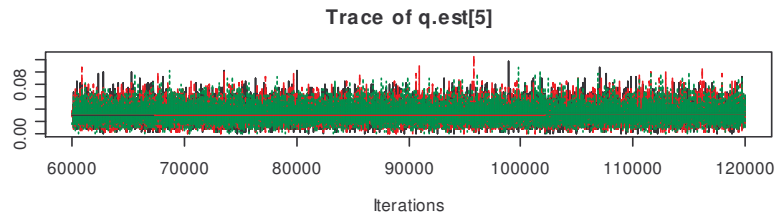
Diagnósticos de Convergência

Traces e Densidades



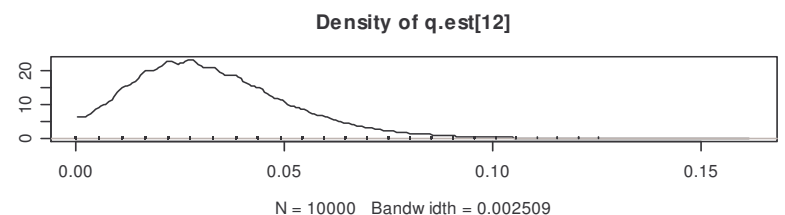
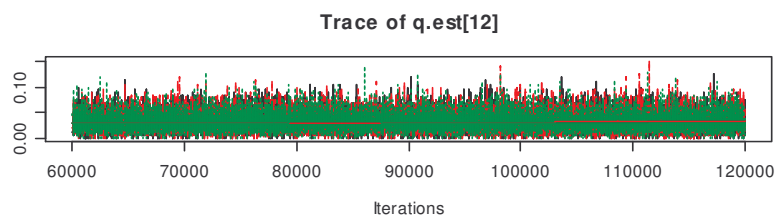
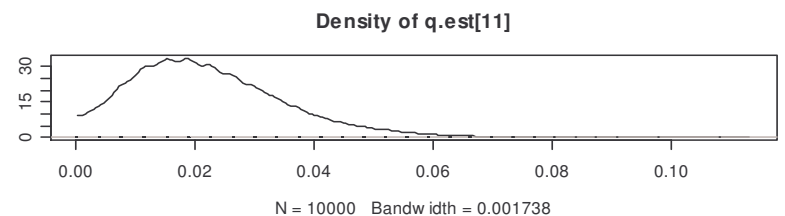
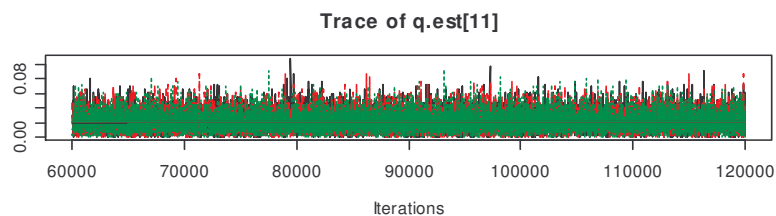
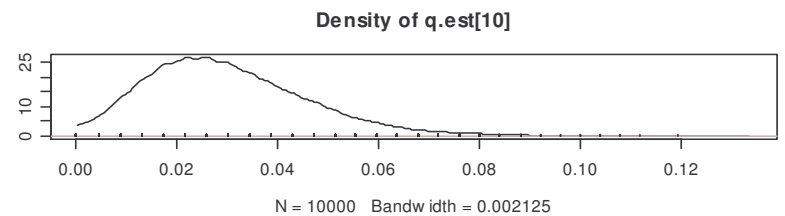
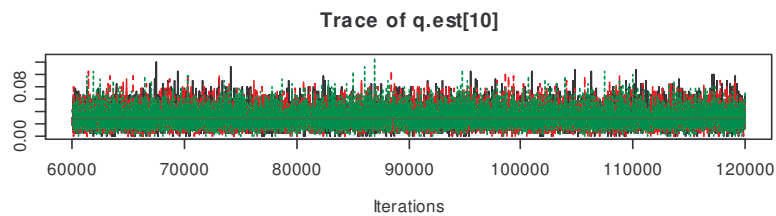
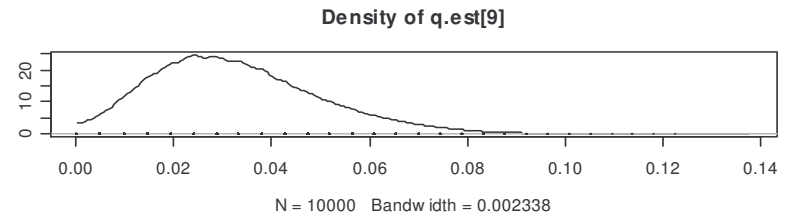
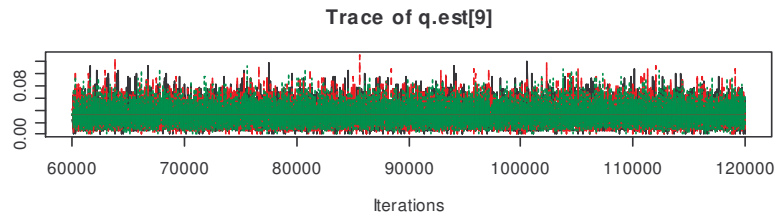
Diagnósticos de Convergência

Traces e Densidades



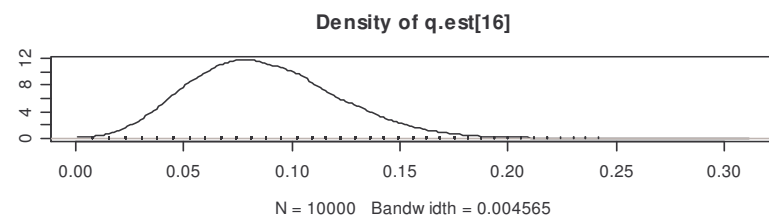
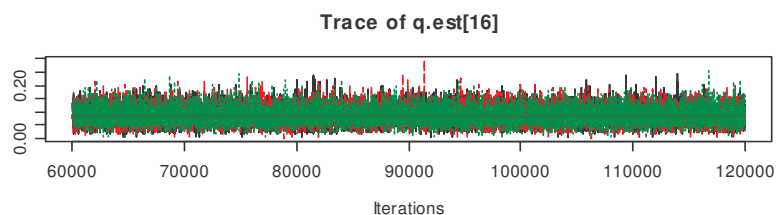
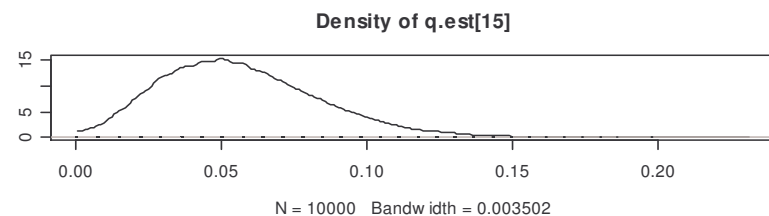
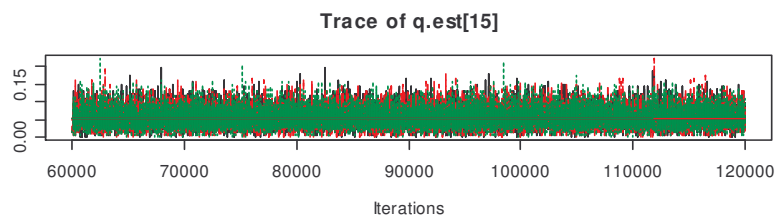
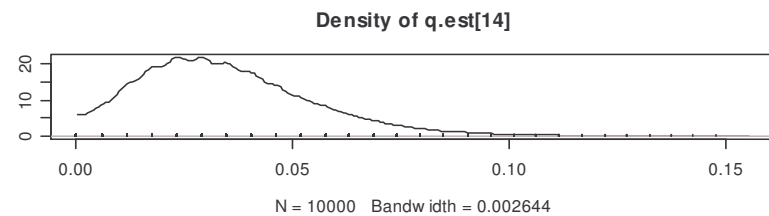
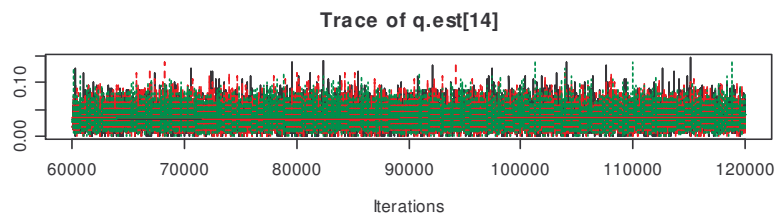
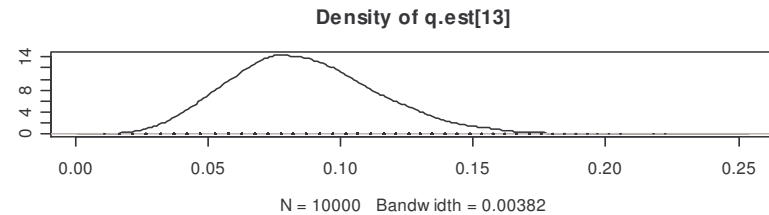
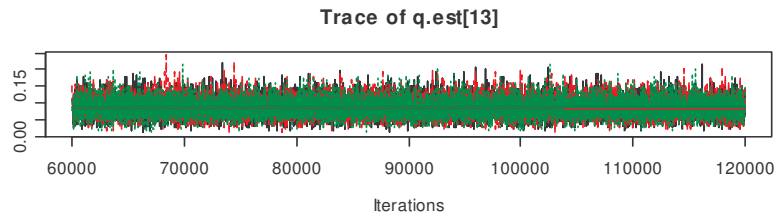
Diagnósticos de Convergência

Traces e Densidades



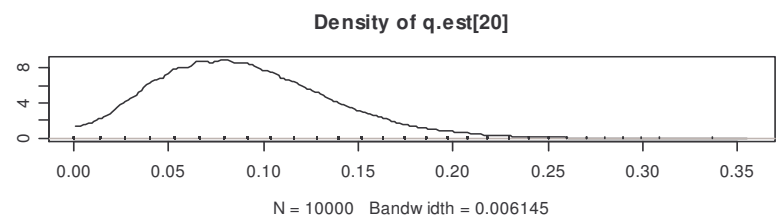
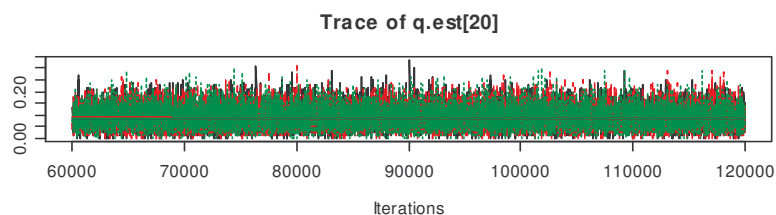
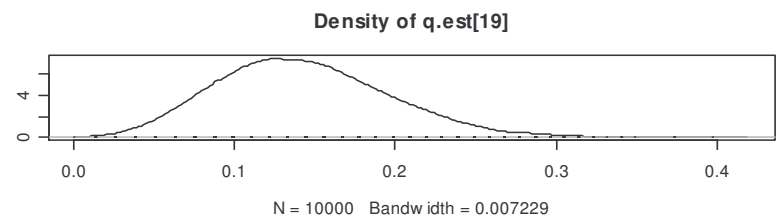
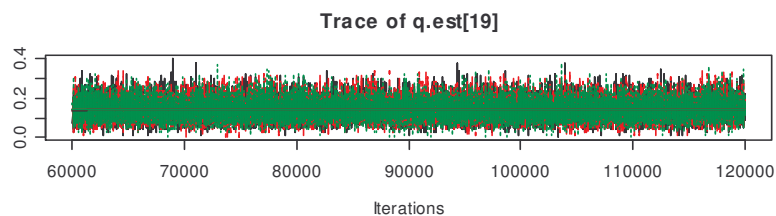
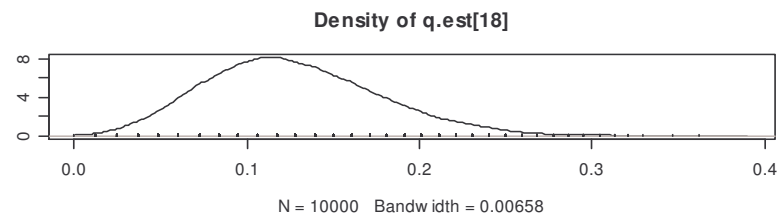
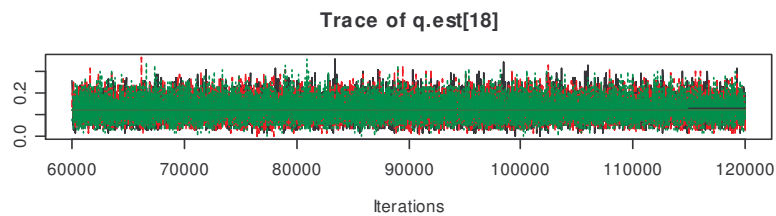
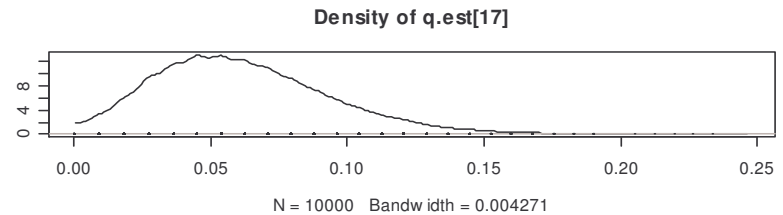
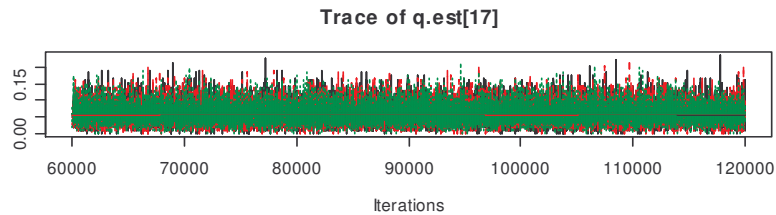
Diagnósticos de Convergência

Traces e Densidades



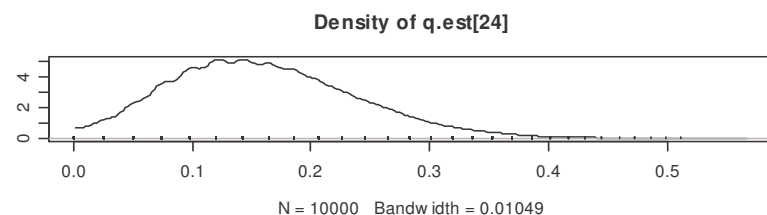
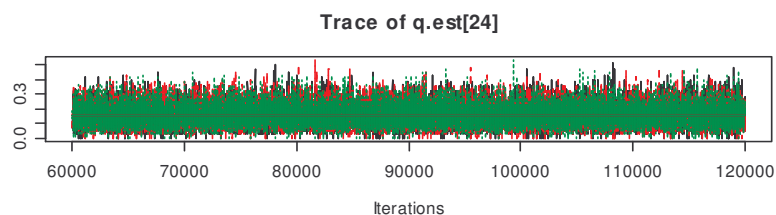
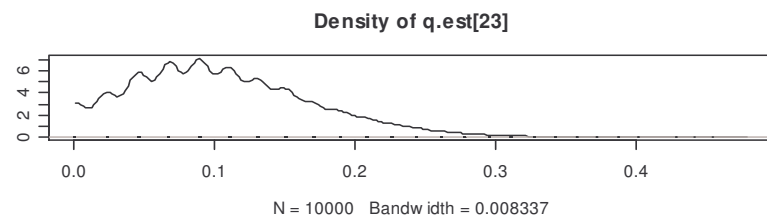
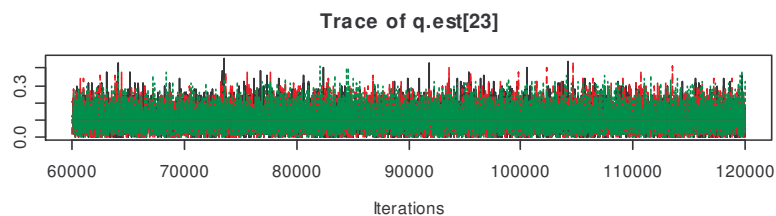
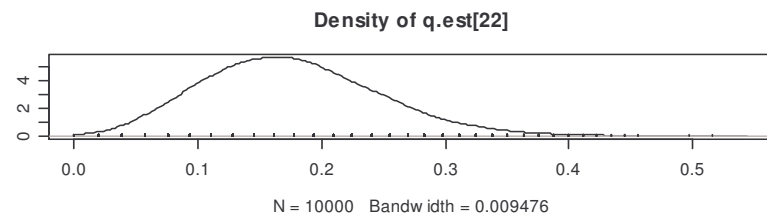
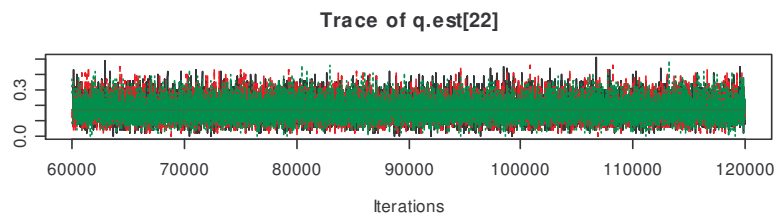
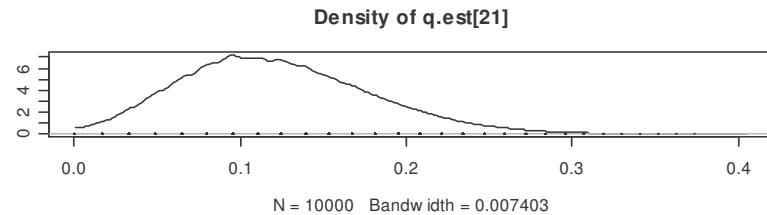
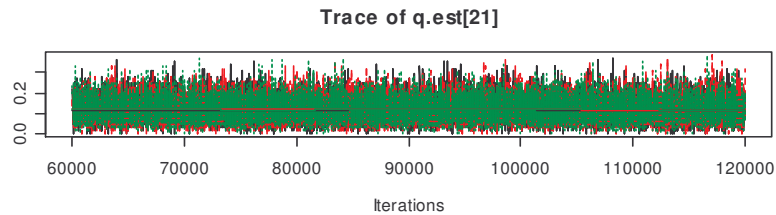
Diagnósticos de Convergência

Traces e Densidades



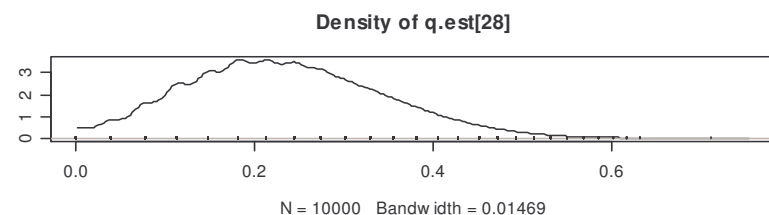
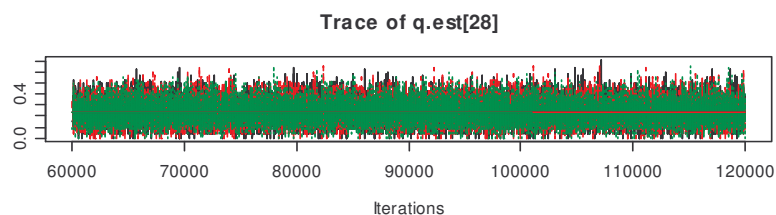
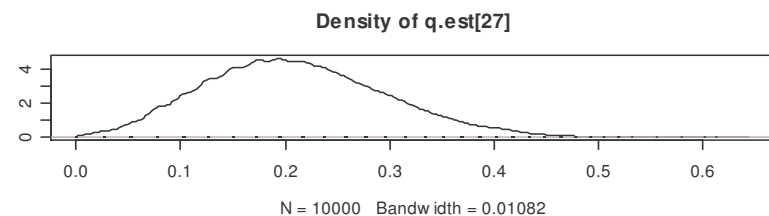
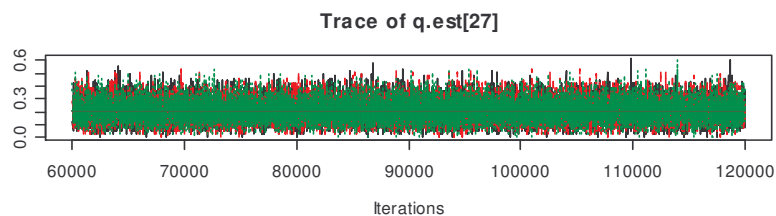
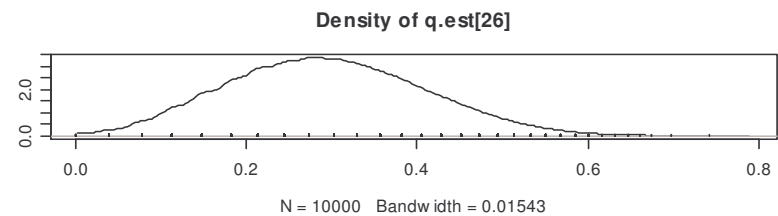
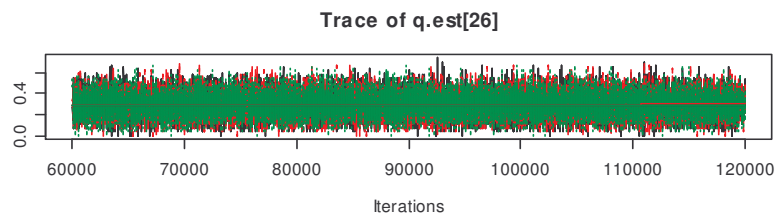
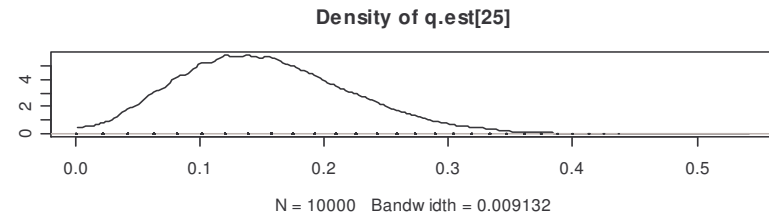
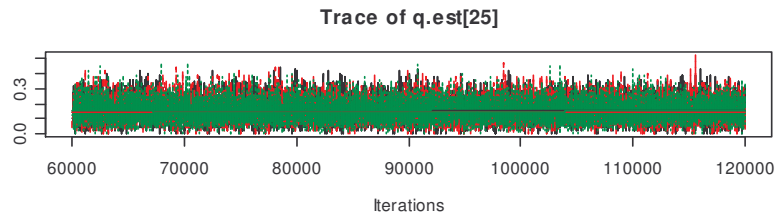
Diagnósticos de Convergência

Traces e Densidades



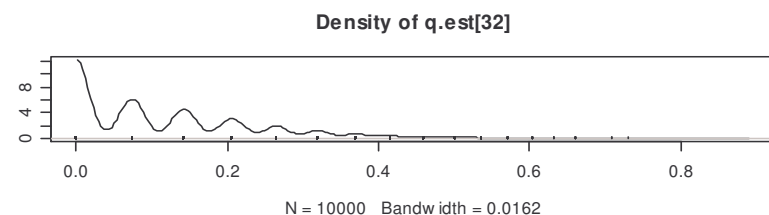
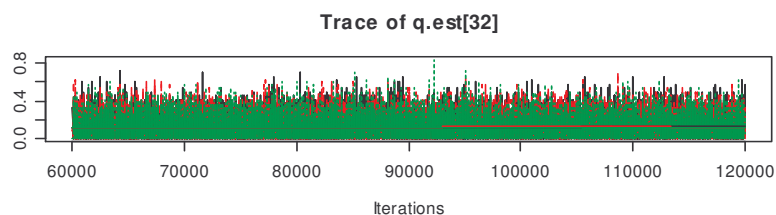
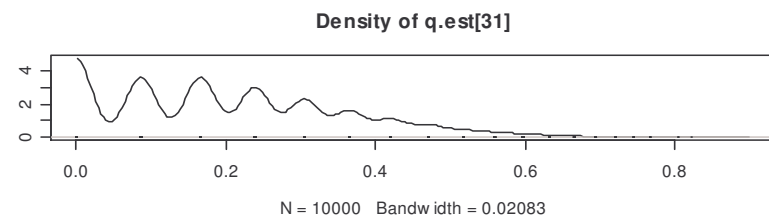
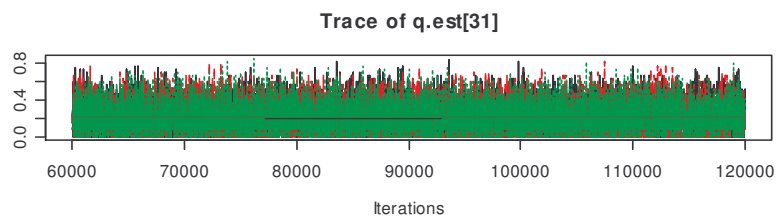
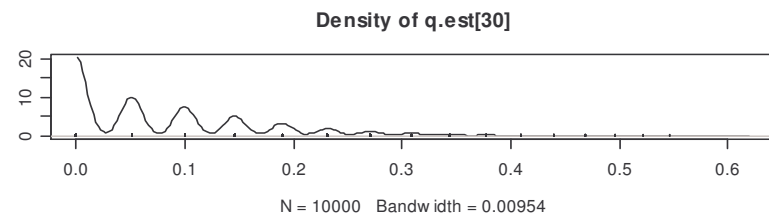
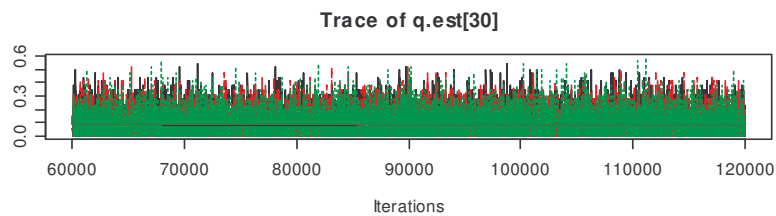
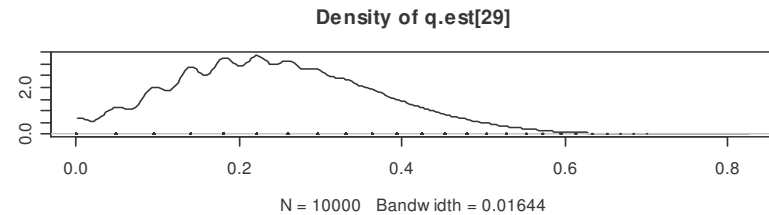
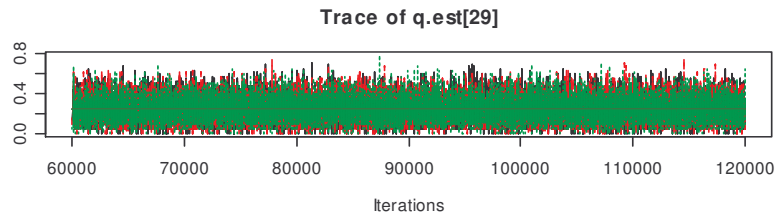
Diagnósticos de Convergência

Traces e Densidades



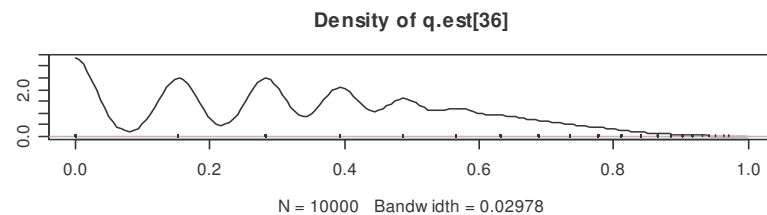
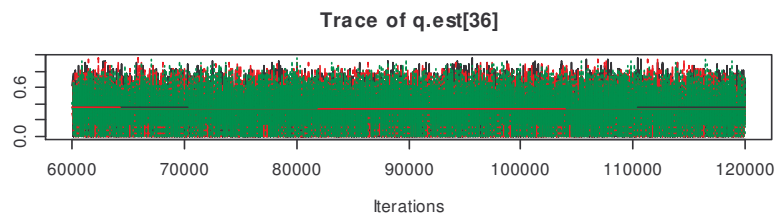
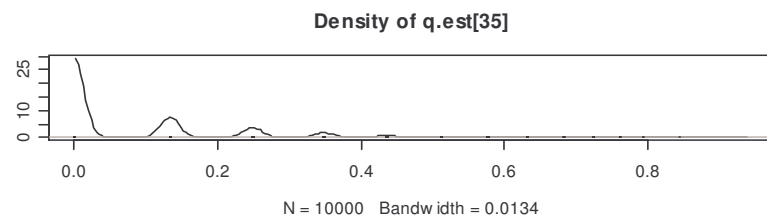
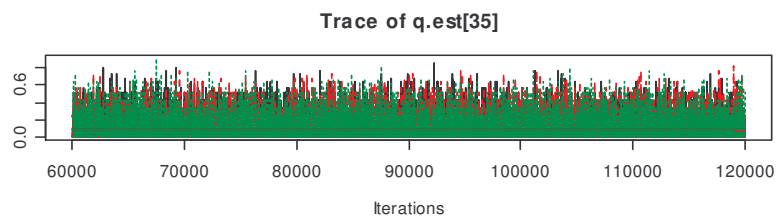
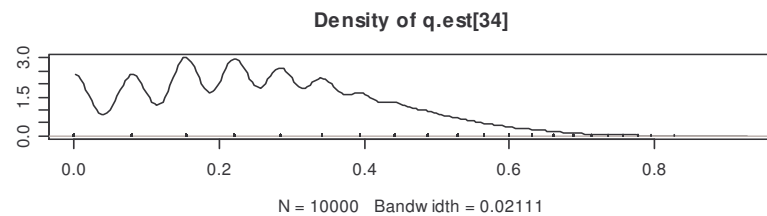
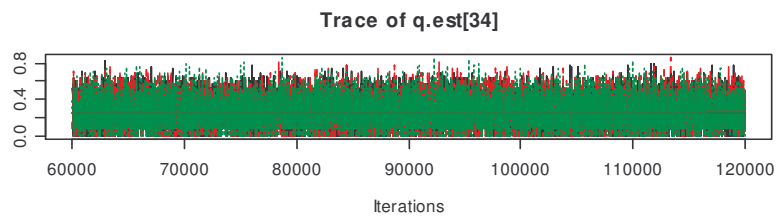
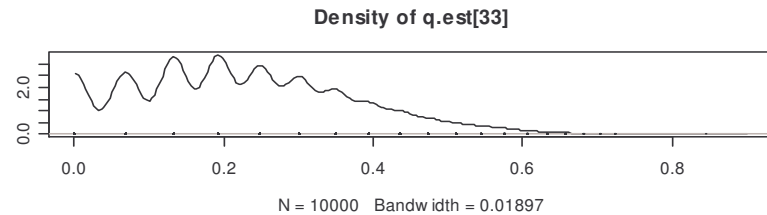
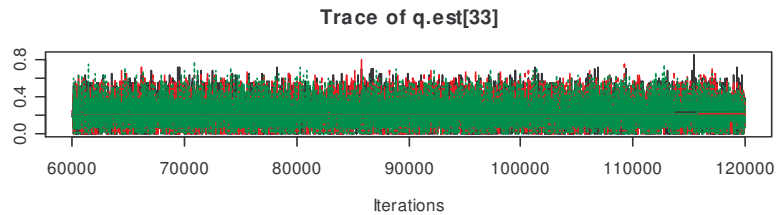
Diagnósticos de Convergência

Traces e Densidades



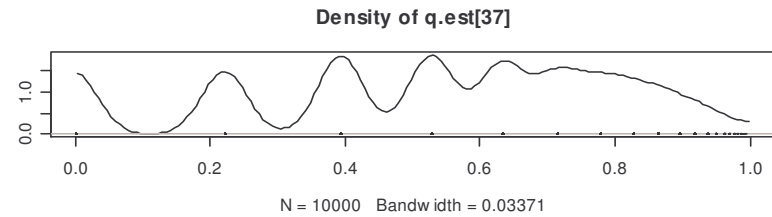
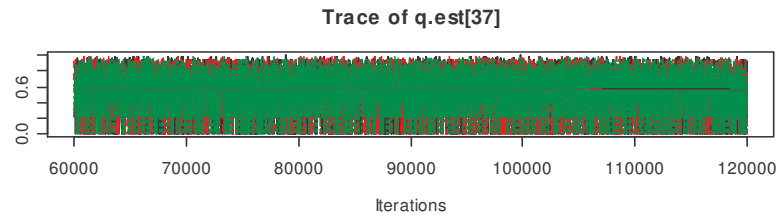
Diagnósticos de Convergência

Traces e Densidades



Diagnósticos de Convergência

Traces e Densidades



Diagnósticos de Convergência

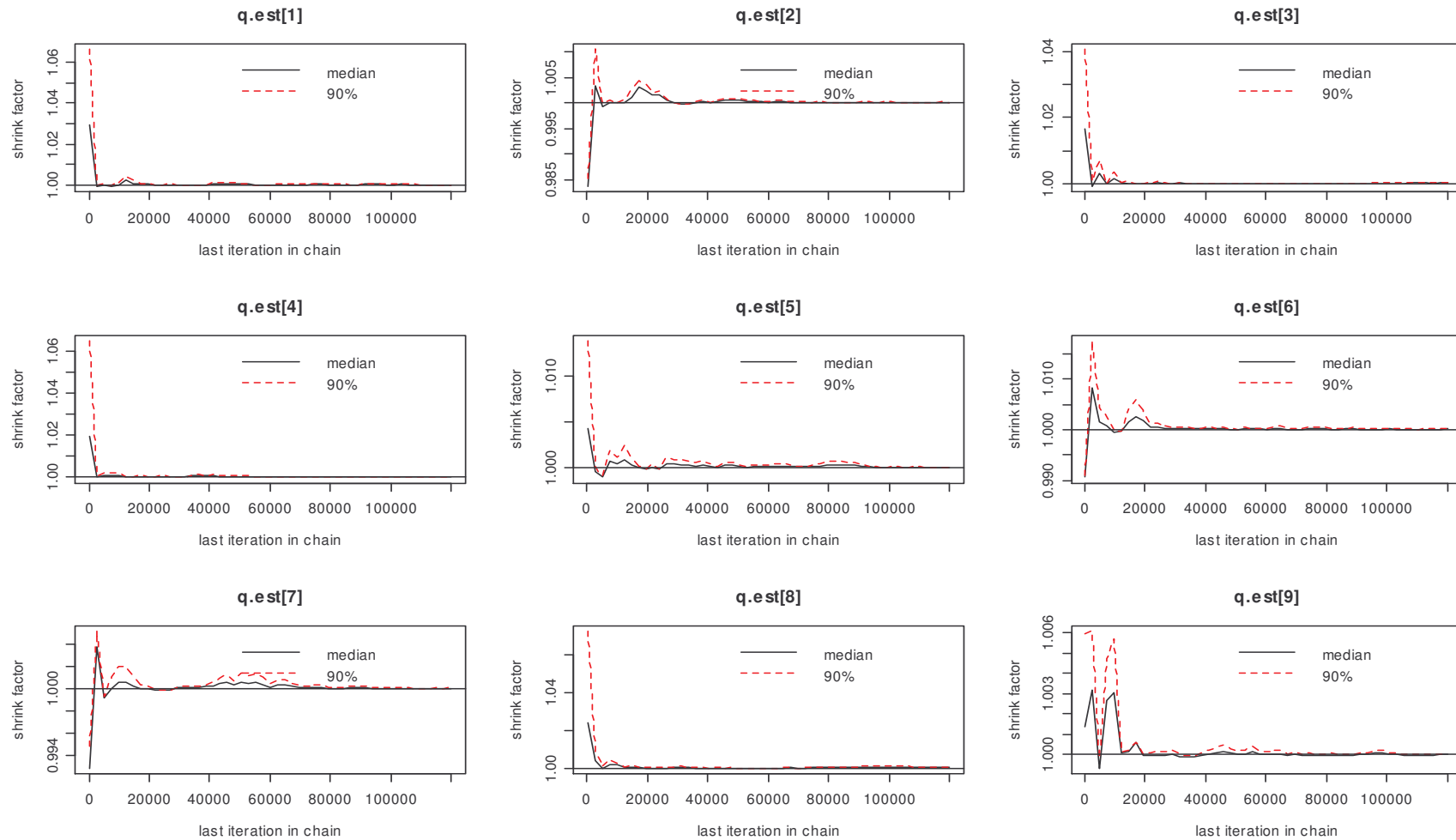
Autocorrelações

- Foram calculadas as autocorrelações para o lag 1, já considerando o intervalo de 6 em 6 observações, e constatou-se que há independência entre as observações, pois não houve nenhuma autocorrelação significativa, indicando não haver problema de convergência da cadeia devido à esta causa:

Idade	Estimativa	Autocorrelação	Idade	Estimativa	Autocorrelação	Idade	Estimativa	Autocorrelação
48	q.est[1]	0.001453129	61	q.est[14]	0.005361617	74	q.est[27]	-0.001961099
49	q.est[2]	-0.003520644	62	q.est[15]	-0.004257972	75	q.est[28]	0.003710171
50	q.est[3]	-0.001609910	63	q.est[16]	0.008992331	76	q.est[29]	-0.005310812
51	q.est[4]	-0.0008982604	64	q.est[17]	-0.000773749	77	q.est[30]	0.004379619
52	q.est[5]	-0.008360017	65	q.est[18]	0.008994867	78	q.est[31]	-0.00430208
53	q.est[6]	0.00332645	66	q.est[19]	-0.007183952	79	q.est[32]	0.00483949
54	q.est[7]	0.0082246	67	q.est[20]	-0.004885133	80	q.est[33]	-0.0093948
55	q.est[8]	0.003530398	68	q.est[21]	-0.004856134	81	q.est[34]	-0.004280934
56	q.est[9]	0.00332662	69	q.est[22]	-0.007274286	82	q.est[35]	0.001840674
57	q.est[10]	-0.003646848	70	q.est[23]	0.0009285603	83	q.est[36]	0.005041396
58	q.est[11]	0.01020034	71	q.est[24]	-0.001671530	84	q.est[37]	0.003566301
59	q.est[12]	0.004913768	72	q.est[25]	0.0002174046			
60	q.est[13]	-0.003374060	73	q.est[26]	-0.004848371			

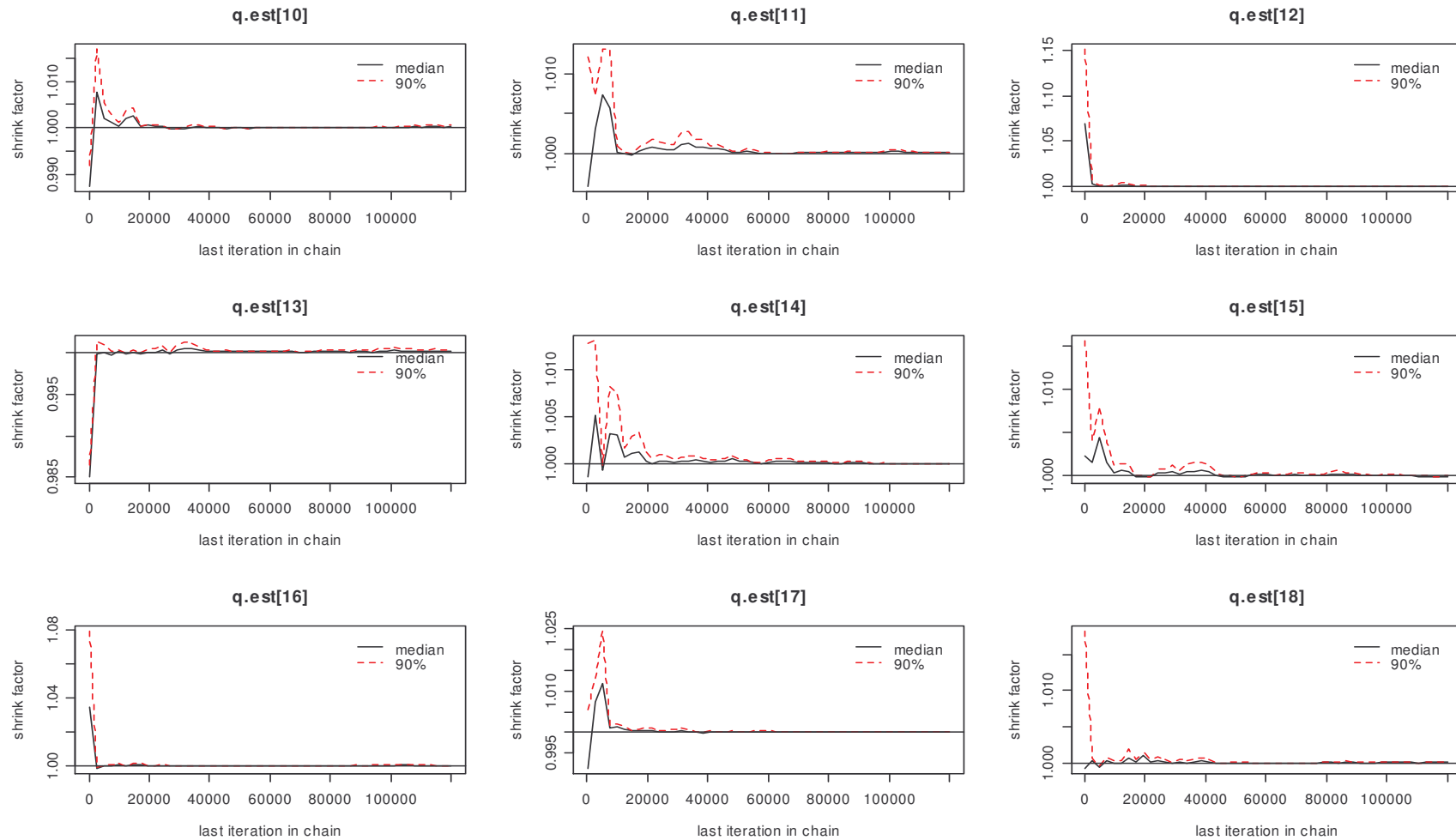
Diagnósticos de Convergência

Estatística de Gelman-Rubin



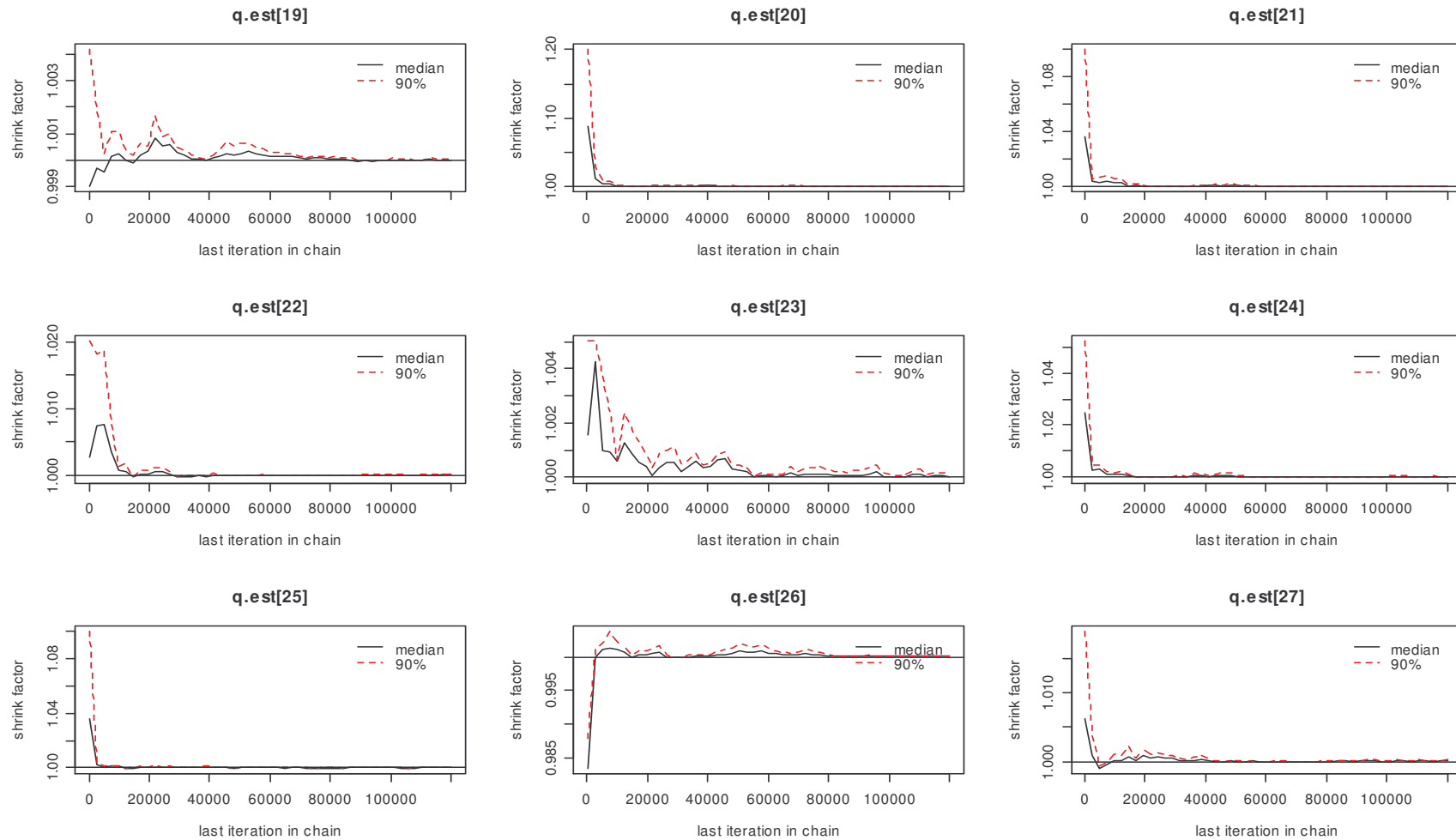
Diagnósticos de Convergência

Estatística de Gelman-Rubin



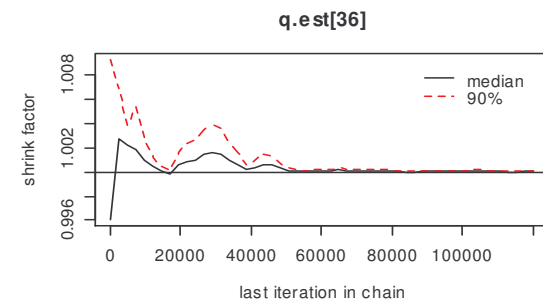
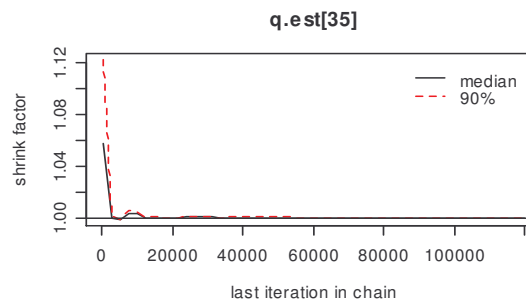
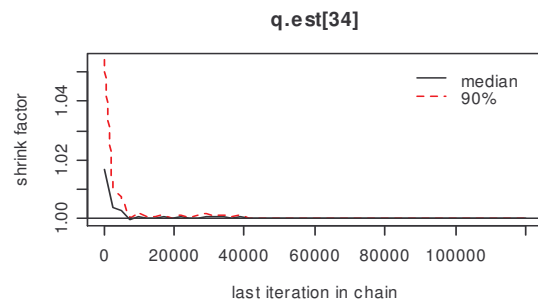
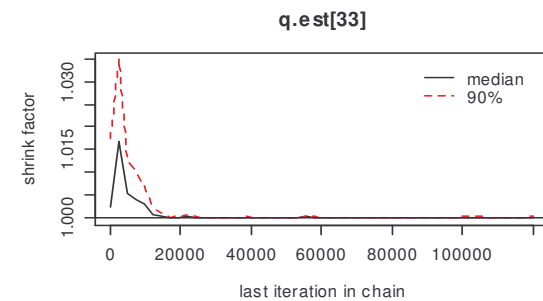
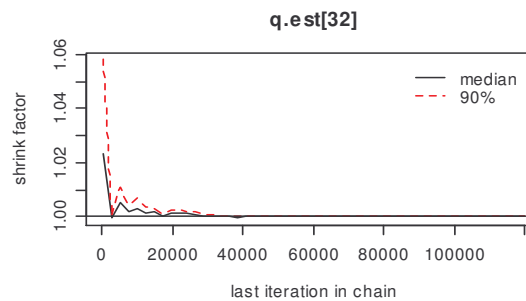
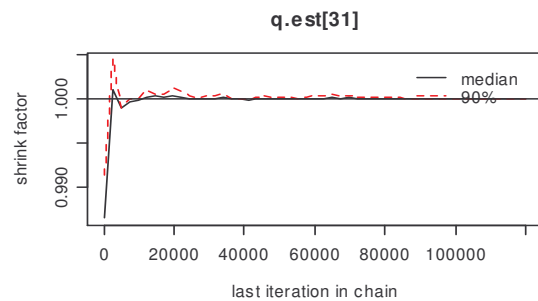
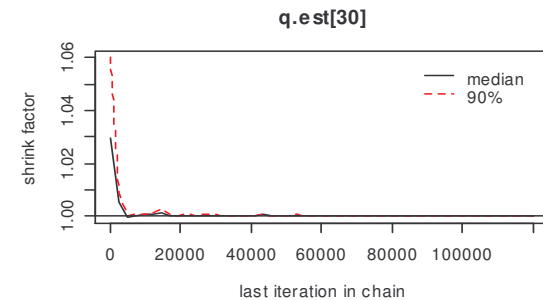
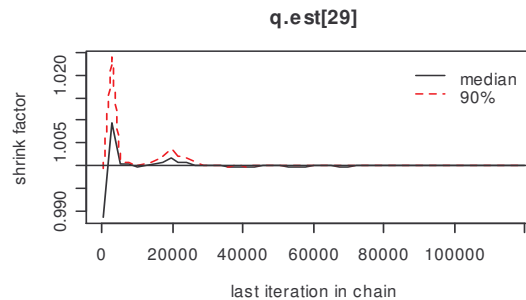
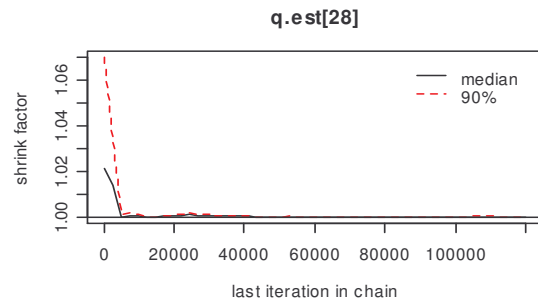
Diagnósticos de Convergência

Estatística de Gelman-Rubin



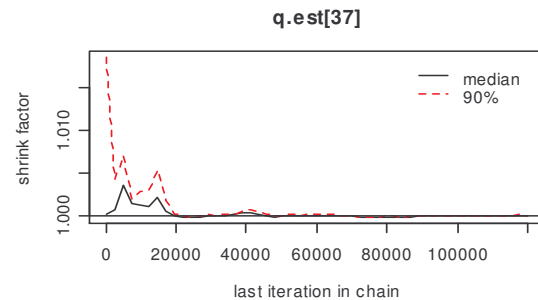
Diagnósticos de Convergência

Estatística de Gelman-Rubin



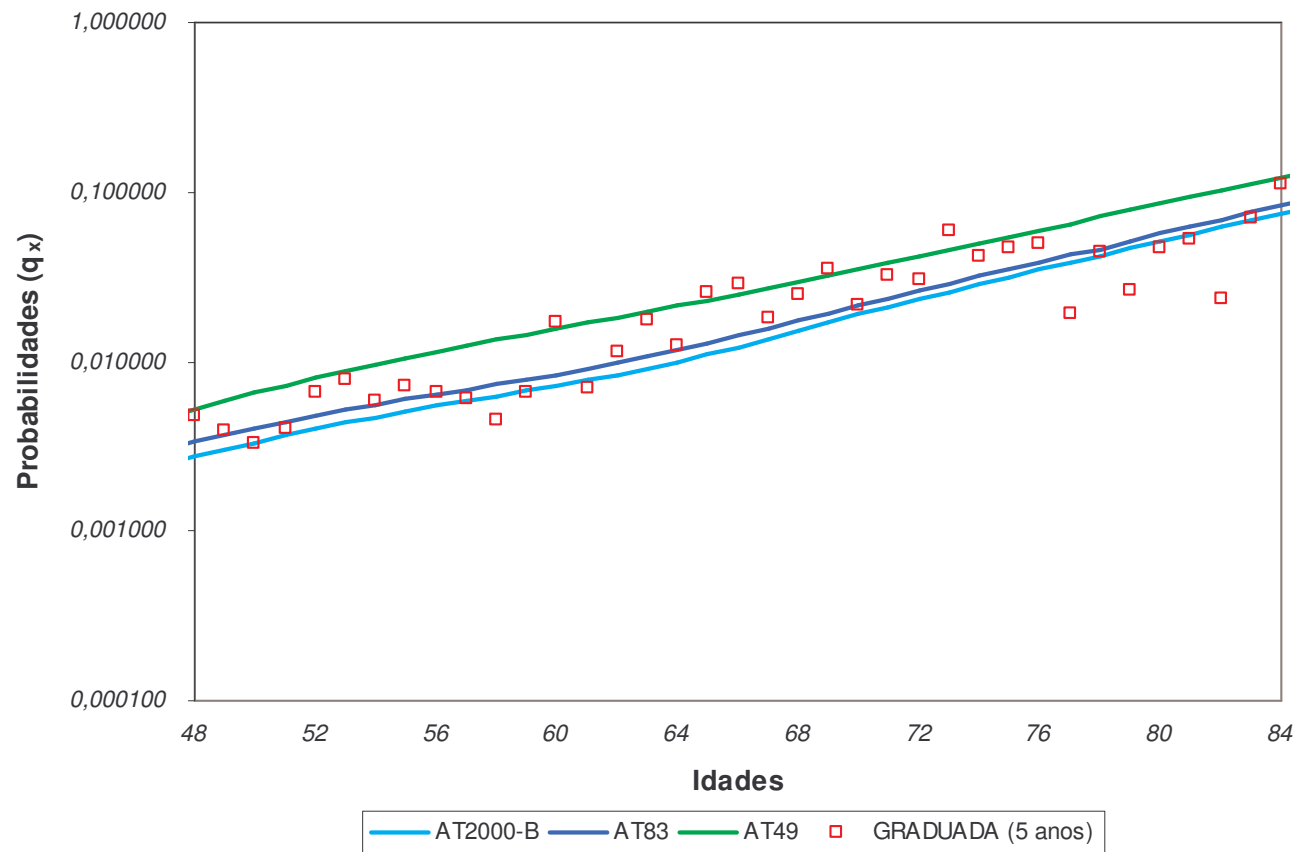
Diagnósticos de Convergência

Estatística de Gelman-Rubin



Comparação das Probabilidades Estimadas com Outras Tábuas

Probabilidades de Morte Anuais Estimadas



Considerações e Recomendações

- ❑ Pode-se observar através do diagnóstico de Gelman-Rubin, que a maioria das variáveis monitoradas ($q.est[i]$) começam a convergir próximo a simulação número 20000 da cadeia, onde algumas apresentam comportamento não estável após esta iteração, mas se estabilizam antes da iteração de número 60000 (burn in), exceto para as idades 54 ($q.est[7]$), 66 ($q.est[19]$), 70 ($q.est[23]$) e 73 ($q.est[26]$).
- ❑ Apesar das autocorrelações não serem significativas, os “traces” aparentam mistura das três cadeias e o diagnóstico de Gelman-Rubin também mostrar comportamento estável antes da iteração de número 60000 (burn in), as densidades apontam várias modas na distribuição a “*posteriori*” de algumas das variáveis monitoradas, concluindo portanto que o problema principal está na pequena quantidade de dados.
- ❑ Recomenda-se um estudo mais aprofundado em análise de sobrevivência para a graduação de taxas com poucos dados.

Códigos dos Programas

```
require(coda) # REQUER O PACOTE CODA
library(coda) # CARREGA A BIBLIOTECA CODA
source("c:\\scripts\\graduacao\\jags2.r")
mcmc=list()
mcmc$niter=readline("Informe o total de iterações:")
mcmc$nburn=readline("Informe o tamanho do aquecimento (burn in):")
mcmc$nthin=readline("Informe o tamanho do intervalo (thin):")

### CRIAÇÃO DO ARQUIVO DE COMANDOS (comandos.cmd)
vars=c('q.est')
jags.cmd(vars=vars,name='model',data='obitos',mcmc=mcmc)
# 'jags.cmd' é uma função c/ 5 parâmetros:
# vars - nome da(s) variavel(eis)
# name - nome do arquivo que contem o modelo ('name'.bug)
# data - nome dos arquivos de dados e valores iniciais ('data'-data.R e 'data'-inits.R)
# mcmc - nome da lista contendo No de iterações, burn in e thin
# seed - semente para o GRN da cadeia (opcional)

### CRIAÇÃO DO ARQUIVO DE DADOS (obitos-data.R)
data=read.table(file="c:\\scripts\\graduacao\\dados.txt",header=T)
# 'data' é uma tabela contendo os No de obitos e expostos ao risco, por idade
d=data$mortes # 'd' e um vetor contendo a var. 'mortes' da tabela 'data'
e=data$expo # 'e' e um vetor contendo a var. 'expo' da tabela 'data'
dump(c('d','e'), file="c:\\scripts\\graduacao\\obitos-data.R") # cria arquivo 'obitos-data.R'
```

Códigos dos Programas

```
### CRIAÇÃO DO ARQUIVO DE DADOS (obitos-data.R)
ini=read.table(file="c:\\scripts\\graduacao\\inicio.txt",header=T)
# 'ini' é uma tabela contendo os valores iniciais dos theta's
theta=ini$AT2000 # 'theta' contem as forças de mortalidade da AT2000
dump(c('theta'), file="c:\\scripts\\graduacao\\obitos-par1.R") # cria arquivo 'obitos-par1.R
theta=ini$AT83 # 'theta' contem as forças de mortalidade da AT83
dump(c('theta'), file="c:\\scripts\\graduacao\\obitos-par2.R") # cria arquivo 'obitos-par2.R
theta=ini$AT49 # 'theta' contem as forças de mortalidade da AT49
dump(c('theta'), file="c:\\scripts\\graduacao\\obitos-par3.R") # cria arquivo 'obitos-par3.R
system('jags comandos.cmd') # chama o JAGS e executa o arquivo 'comandos.cmd'
output=read.openbugs(stem="c:\\scripts\\graduacao\\", start=60000, end=120000, quiet=F)
plot(output, trace=T, density=T, smooth=T, auto.layout=T, ask=dev.interactive())
```

Códigos dos Programas

```
jags.cmd=function(vars,data,name,mcmc,seed)
{
  file=paste('comandos.cmd')
  text=NULL
  nvar=length(vars)
  if (!missing(seed)) text=paste(text,"seed ",seed,"\n",sep="")
  text=paste(text,'model in "c:\\scripts\\graduacao\\',name,'.bug"\n',sep="")
  text=paste(text,'data in "c:\\scripts\\graduacao\\',data,'-data.R"\n',sep="")
  text=paste(text,'compile, nchains(3)\n',sep="")
  text=paste(text,'parameters in "c:\\scripts\\graduacao\\',data,'-par1.R", chain(1) \n',sep="")
  text=paste(text,'parameters in "c:\\scripts\\graduacao\\',data,'-par2.R", chain(2) \n',sep="")
  text=paste(text,'parameters in "c:\\scripts\\graduacao\\',data,'-par3.R", chain(3) \n',sep="")
  text=paste(text,'initialize\n',sep="")
  text=paste(text,'update ',as.integer(mcmc$nburn),'\n',sep="")
  aux=NULL
  if (mcmc$nthin>1) aux=paste(' ',thin(',mcmc$nthin,')',sep="")
  for(i in 1:nvar) text=paste(text,'monitor set ',vars[i],aux,'\n',sep="")
  text=paste(text,'update ',as.integer(mcmc$niter),"n",sep="")
  text=paste(text,'coda *, stem("c:\\scripts\\graduacao\\CODA")\nexit\n',sep="")
  cat(text,file=file)
}
```

Códigos dos Programas

```
model in "c:\scripts\graduacao\model.bug"  
data in "c:\scripts\graduacao\obitos-data.R"  
compile, nchains(3)  
parameters in "c:\scripts\graduacao\obitos-par1.R", chain(1)  
parameters in "c:\scripts\graduacao\obitos-par2.R", chain(2)  
parameters in "c:\scripts\graduacao\obitos-par3.R", chain(3)  
initialize  
update 60000  
monitor set q.est, thin(6)  
update 120000  
coda *, stem("c:\scripts\graduacao\CODA")  
exit
```

Códigos dos Programas

```
###MODELO DE CARLIN MODIFICADO COM BETA FIXO (MODELO 1)
model{
###função de verossimilhança
  for (i in 1:length(d))
  {
    d[i]~dpois(lambda[i]) # O numero de mortos d[i]~poisson(lambda[i])
    lambda[i]<-theta[i]*e[i] # lambda=(theta*e)
  }
###Estabelecimento da priori de theta, para i=1,...,N
  for (i in 1:length(d))
  {
    theta[i]~dgamma(0.001,0.001)
  }
# theta[1:length(d)]<-sort(theta) # condição imposta a dist. priori: theta[i-1]<theta[i]<theta[i+1]
###Estabelecimento da distribuição preditiva do numero de mortos
  for (i in 1:length(d))
  {
    drep[i]~dpois(lambda[i]) # Numero de mortes predito através da dist. preditiva: d(r)
    theta.est[i]<-drep[i]/e[i] # força de mortalidade futura estimada: theta(r)=d(r)/e(i)
    q.est[i]<-1-exp(-theta.est[i]) # qx estimado a partir de theta(r): q(r)=1-exp[-theta(r)]
  }
}
```

Bibliografias

- [1] BOWERS, N. L.; GERBER, H. U.; HICKMAN, J. C.; JONES, D.A.; NESBITT, C.J. – *Actuarial Mathematics* – The Society of Actuaries, 1986 – Itasca.
- [2] COLES, S.; ROBERTS, G.; JARNER, S. – *Computer Intensive Methods* – University of Lancaster, 2002 – Lancaster.
- [3] COLES, S. – *Statistical Inference: (Bayesian Inference)* – University of Lancaster, 1997 – Lancaster.
- [4] GAMERMAN, D.; MIGON, H. S. – *Statistical Inference: an Integrated Approach* – Arnold, 1999 – London.
- [5] GILKS, W. R.; RICHARDSON, S.; SPIEGELHALTER, D. J. – *Markov Chain Monte Carlo in Practice* – Chapman & Hall, 1996 – London.
- [6] PLUMMER, M. – *JAGS Version 0.99 manual* – International Agency for Research on Cancer, 2007.
- [7] SHERRIS, M. – *Principles of Actuarial Science* – University of New South Wales, 1999 – Sidney.