

Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” Universidade de São Paulo

SEMINÁRIO NA UFPR/LEG

Bruno H F Fonseca - bhffonse@esalq.usp.br

Estatística e Experimentação Agronômica ESALQ/USP

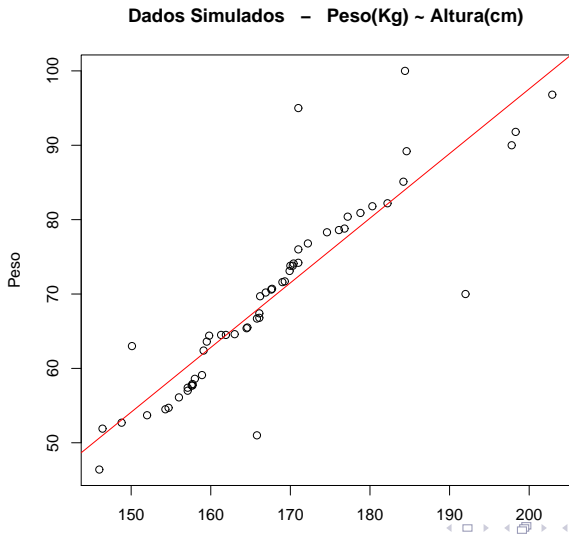
Orientador: Paulo Justiniano Ribeiro Jr.

Laboratório de Estatística e Geoinformação LEG/UFPR

Curitiba/2008

MODELOS GEOESTADÍSTICOS MULTIVARIADOS

Modelos lineares:



Modelos geoestatísticos:

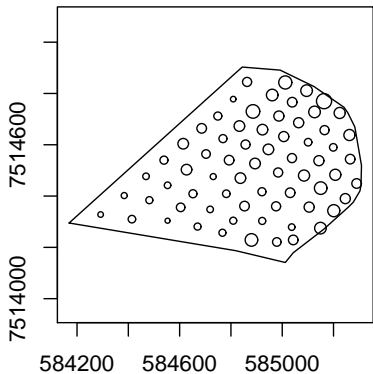
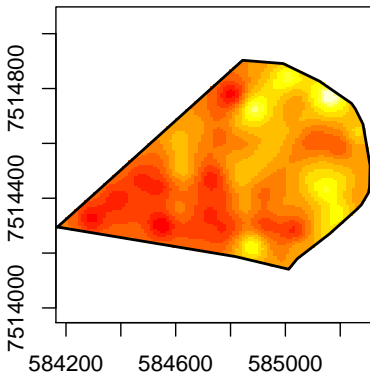


Gráfico de Círculos – Ph do Solo



Predição – Ph do Solo

- Modelos Lineares
- Modelos Multivariados
- Estatística Espacial
 - Geoestatística
 - Dados de Área
 - Processos Pontuais

- Revisão bibliográfica sobre campos aleatórios
- Revisão bibliográfica sobre modelos geoestatísticos multivariados
- Revisão bibliográfica sobre cópulas
- Expor formas de modelar as estruturas de correlações espaciais e entre respostas

Uma notação para um campo aleatório $Z(s)$ na localização s pertencente ao espaço sob estudo G é:

$$(Z(s) : s \in G \subset R^d)$$

Segundo Schmidt e Sansó (2006) e Le e Zidek (2006), a descrição de um campo aleatório é obtida através da:

$$F_{S_1, S_2, \dots, S_n}(z_1, z_2, \dots, z_n) \equiv P(Z(s_1) \leq z_1, Z(s_2) \leq z_2, \dots, Z(s_n) \leq z_n)$$

Assumindo que o campo aleatório é gaussiano, o processo aleatório é completamente especificado por:

- Vetor de média $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$
- Matriz de covariâncias

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1,n} & \sigma_{2,n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Sendo assim a distribuição conjunta das observações é:

$$f_{s_1, s_2, \dots, s_n}(z_1, z_2, \dots, z_n) = (2\pi)^{-0.5n} |\Sigma|^{-0.5} \exp(-0.5(x - \mu)^t \Sigma^{-1} (x - \mu))$$

Em estudos de geoestatística é praticamente inviável fazer repetições de observações, sendo assim, algumas suposições devem ser adotadas para que seja possível fazer inferências, a suposição mais comum é a de estacionariedade:

- Forte

- $f_{s_1, s_2, \dots, s_n}(z_1, z_2, \dots, z_n) = f_{s_1+h, s_2+h, \dots, s_n+h}(z_1+h, z_2+h, \dots, z_n+h)$

- Fraca

- $E[Z(s)] = \mu$
 - $Cov[Z(s), Z(s+h)] = C(h)$

- Intrínseca

- $E[Z(s)] = \mu$
 - $Var[Z(s) - Z(s+h)] = 2\gamma(h)$

Definições válidas para qualquer incremento h e $\gamma = C(0) - C(h)$.

Propriedades da função de covariâncias:

- $Cov[Z(s), Z(s + 0)] = Var[Z(s)] = C(0) \geq 0$
- $C(h) = C(-h)$
- $C(0) \geq |C(h)|$
- $C(h) = Cov[Z(s), Z(s + h)] = Cov[Z(0), Z(h)]$
- Se $C_{j's}$ válidas, então $\sum_j b_j C_j(h)$ e $\prod_j C_j(h)$ são funções

Funções de covariâncias válidas:

- Família Matérn

$$\rho(h) = 2^\kappa - \Gamma(\kappa)^{-1} (h/\phi)^\kappa K_\kappa(h/\phi)$$

os parâmetros dessa função são $\phi > 0$ e $\kappa > 0$, que são vinculados a escala com a dimensão de distância e suavidade do processo e $K_\kappa(\cdot)$ é a função Bessel de ordem κ .

- Família Exponencial Potência

$$\rho(h) = \exp(-h/\phi)^\kappa$$

essa família também possui dois parâmetros, com mesmas interpretações da família Matérn, no entanto agora κ limitado no intervalo $[0, 2]$.

MODELO GEOESTATÍSTICO UNIVARIADO

Com as estruturas paramétricas definidas, pode-se pensar na modelagem:

$$Y(s) = Z(s) + \epsilon(s), \quad s = (s_1, s_2, \dots, s_n),$$

sendo $Y(s)$ o vetor dos valores amostrados da variável de interesse, $Z(s)$ o campo gaussiano não observável e $\epsilon(s)$ o vetor dos ruídos brancos que são *i.i.d.* de uma $N(0, \tau^2)$.

Definida a modelagem, pode-se pensar em:

- Distribuição de probabilidade associada ao modelo:

$$Y(s)|Z(s) \sim N(\mu(s); \Sigma + \tau^2 I), \quad I \text{ matriz identidade,}$$

- Estimação dos parâmetros:
 - AD-HOC
 - Mínimos Quadrados Ponderados
 - Máxima Verossimilhança

MODELO GEOESTATÍSTICO UNIVARIADO

A função de verossimilhança, $l((\theta, \mu); Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, associada ao modelo é:

$$-0.5[\ln(|\Sigma(\theta)|) + n \ln(2\pi) + (Y(s) - \mu(s))^t \Sigma(\theta)^{-1} (Y(s) - \mu(s))]$$

sendo $\theta = (\sigma^2, \phi, \tau^2)$ o vetor de parâmetros associados as covariâncias e as correlações. Os estimadores de máxima verossimilhança são muito utilizados por conta das suas propriedades assintóticas. No entanto a matriz de variância e covariância pode possuir dimensão muito grande, o que gera elevado tempo computacional ou até inviabiliza a estimação dos parâmetros. Uma abordagem muito utilizada nesse contexto é a Bayesiana, o que requer métodos computacionais intensivos, como por exemplo MCMC.

Homenagem ao pesquisador sul-africano D.G. Krige que foi um dos pioneiros em estudos de predição espacial. A krigagem nada mais é do que o processo de predição para os valores do campo aleatório que não foram amostrados.

$$\delta(z; s) = \mu_z + \sigma^2 r' \Sigma^{-1} (z - \mu_z)$$

Agora existem p atributos de interesse associados ao campo aleatório:

$$Y(s_i) = (Y_1(s_i), Y_2(s_i), \dots, Y_j(s_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 1, 2, \dots, p.$$

sendo $Y_j(s_i)$ o valor observado do atributo j na localização i do espaço de interesse G , então existem n vetores de dimensão $p \times 1$. Sendo assim, novamente o maior problema é encontrar uma matriz de covariâncias válida, Σ $n \times n$ para o campo aleatório Z multidimensional.

Existem diversas formas para estruturar um problema geoestatístico multivariado, neste estudo serão analisadas as seguintes formas de estruturar esse este tipo de modelagem:

- Modelo proposto por Diggle e Ribeiro Jr. (2006)
- Modelo de Co-regionalização Linear proposto por Matheron (1982)
- Modelo Hierarquico Condicional proposto por Schmidt e Sansó (2006)
- Modelo utilizando Cópulas Arquimedianas

Segue o modelo proposto por Diggle e Ribeiro Jr. (2006), por simplicidade um modelo bivariado:

$$Y_1(s) = \mu_1(s) + \sigma_{01}R_0 + \sigma_1R_1 + \epsilon_1$$

$$Y_2(s) = \mu_2(s) + \sigma_{02}R_0 + \sigma_2R_2 + \epsilon_2$$

sendo $Y_1(s)$ e $Y_2(s)$ os valores observados dos atributos nas localizações s , σ_{01} e σ_{02} os desvios padrões associados a parte comum das correlações, R_0 , entre os processos aleatórios, e σ_1 e σ_2 os desvios padrões associados as correlações dentro de cada variável, R_1 e R_2 e ϵ 's ruídos brancos.

Com o modelo anterior o conjunto de parâmetros a ser estimado é:

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_1, \sigma_2, \phi_0, \phi_1, \phi_2, \tau_1, \tau_2)$$

sendo ϕ_0 , ϕ_1 e ϕ_2 os parâmetros associados as matrizes de correlações R_0 , R_1 e R_2 , respectivamente. Sendo que agora é possível estruturar a matriz de covariância associada ao vetor empilhado dos valores de $Y_1(s)$ e $Y_2(s)$. Logo ficará pronto a estrutura paramétrica associada a distribuição normal np variada e é possível pensar na estimação dos parâmetros.

Antes de introduzir os modelos de co-regionalização, é preciso falar um pouco sobre modelos separáveis:

- Seja ρ uma função de correlação válida
- T uma matriz $p \times p$, positiva definida

Pensando que existe n vetores $p \times 1$, então a covariância do processo entre duas localizações quaisquer s e s' é:

$$C(s, s') = \rho(s - s')T$$

Onde T deve ser encarado como a matriz das covariâncias entre os elementos dos vetores do processo em questão.

Agora considerando o empilhamento dos vetores observados em n localizações tem-se que:

$$\Sigma_Z = R \otimes T$$

sendo R uma matriz $n \times n$ com elementos de correlação, onde cada elemento $R_{ij} = \rho(s_i, s_j)$, logo é assegurado que a matriz Σ_Z é positiva definida.

Com a estrutura da matriz de covariância do campo multivariado latente definida, pode-se pensar na estrutura da matriz de covariância dos n vetores $p \times 1$ dos valores observados. Considerando que existe uma matriz diagonal D $p \times p$ de variâncias dos ruídos brancos. Logo, deve-se somar D em todas sub-matrizes de Σ_Z que contêm as covariâncias entre os elementos da mesma localização espacial, sendo assim:

$$\Sigma_Y = R \otimes T + I_n \otimes D$$

Se temos um processo gaussiano np variado

$Z = (Z_1(s_1), Z_2(s_1), \dots, Z_{p-1}(s_n), Z_p(s_n))$, o qual agora é empilhado pelas localizações amostradas, como já é conhecido Σ_Z é $np \times np$, onde podemos decompor a matriz Σ_Z $np \times np$ em n sub-matriz de dimensão $p \times p$, onde cada submatriz possui as covariâncias entre as p variáveis de cada uma das n localizações. Sendo assim utilizando modelos de co-regionalização se tem que:

$$Z(s_i) = (Z_1(s_i), Z_2(s_i), \dots, Z_p(s_i))^t = A\omega(s_i)^t$$

sendo A $p \times p$ uma matriz triangular inferior de parâmetros desconhecidos e as componentes de $\omega(s_i)$, $\omega_j(s_i)$, são processos espaciais com média 0, variância 1 e existe independência entre seus elementos, independente das localizações, ou seja, $cov(\omega_l(s_{k1}), \omega_t(s_{k2})) = 0$ para qualquer $k1, k2$, desde que $l \neq t$.

Sendo assim, a matriz de covariância de Z é definida por:

$$\Sigma_{Z(s)} = \sum_j R(\phi_j) \otimes T_j,$$

onde $R(\phi_j)$ é uma matriz $n \times n$ que contém as correlações entre para cada variável j e $T_j = a_j a_j'$, onde a_j é a j -ésima coluna da matriz A .

Agora com a matriz de covariância o campo aleatório definida, pode-se pensar na matriz de covariância para os valores observados. Conforme foi estruturada a Σ_Z deve-se empilhar os valores observados por localização amostrada, $Y = (Y_1(s_1), Y_2(s_2), \dots, Y_p(s_n))$, logo pensando numa modelagem onde cada variável possui um ruído branco, teremos a seguinte distribuição de probabilidade associada aos valores observados:

$$Y \sim N(\mu, \sum_j R(\phi_j) \otimes T_j + D \otimes I)$$

sendo μ o vetor de médias associado ao modelo, $\sum_j R(\phi_j) \otimes T_j$ a parte da matriz de covariância proveniente do campo aleatório Z , D a matriz de covariâncias diagonal $p \times p$ do vetor de ruídos brancos, onde os $D_{jj} = \text{var}(\epsilon_j) = \tau_j$ e I é uma matriz identidade $n \times n$. E agora o problema é computacional para fazer a estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros.

MODELO HIERARQUICO CONDICIONAL

Da teoria clássica de probabilidade tem-se que a distribuição conjunta de um vetor $Y(s) = (Y_1(s), Y_2(s), \dots, Y_p(s))$ é:

$$f(Y(s)) = f(Y_1(s))f(Y_2(s) | Y_1(s))\dots f(Y_p(s) | Y_1(s), Y_2(s), \dots, Y_{p-1}(s))$$

Sendo assim, pode-se pensar na seguinte modelagem para um problema de geoestatística multivariado, por simplicidade um bivariado:

$$Y_1(s) = \mu_1(s) + Z_1(s)$$

$$Y_2(s) = \mu_2(s) + \alpha^{2|1} Y_1(s) + Z_2(s) + \epsilon(s)$$

sendo que o primeiro modelo é ajustado sem ruído branco e no segundo modelo a primeira variável explica uma parte da variabilidade da segunda variável, explicação medida através do parâmetro $\alpha^{2|1}$.

Uma outra forma de estabelecer a distribuição conjunta de dois processos aleatórios são as cópulas:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_k) = C_\alpha(F_1(y_1), F_2(y_2), \dots, F_k(y_k))$$

Sendo assim, é possível achar a distribuição acumulada conjunta de processos aleatórios e o parâmetro α mede a correlação entre os processos. Existem várias abordagens de utilização de cópulas, uma muito utilizada na literatura são as cópulas Archimedianas uniparamétricas.

Introduzida por Frank (1979), a cópula para um problema geoestatístico bivariado é:

$$H_{\alpha}(s, s') = -\frac{1}{\alpha} \log \left[1 + \frac{(\exp(-\alpha F_1(y_1(s))))-1)(\exp(-\alpha F_2(y_2(s')))-1)}{\exp(-\alpha)-1} \right]$$

onde $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow F_{12}(y_1(s), y_2(s')) = F_1(y_1(s))F_2(y_2(s'))$

CÓPULA DE CLAYTON

Obtida por Clayton (1978) a cópula para um problema geoestatístico bivariado é:

$$H_{\alpha}(s, s') = \left[F_1(y_1(s))^{-\alpha} + F_2(y_2(s'))^{-\alpha} - 1 \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Note que se $\alpha \rightarrow 0$, obtem-se $F_{12}(y_1(s), y_2(s')) = F_1(y_1(s))F_2(y_2(s'))$.

- Agricultura de precisão
- Fazenda em Echaporan/SP
 - 51.8 hectares
 - Dois históricos de manejo
- Diversos parâmetros de solo observados em 67 localizações
 - Ph do solo
 - Saturação por bases do solo

ANÁLISE DESCRITIVA - SATURAÇÃO POR BASES

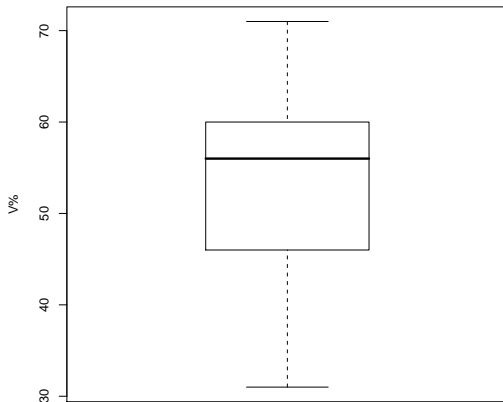
Seguem as estatísticas descritivas da Saturação por bases:

Mínimo	Q1	Mediana	Média	D.P.	Q3	Máximo
31.00	46.00	56.00	53.27	10.05	60.00	71.00

TABELA: Estatísticas descritivas da saturação por bases

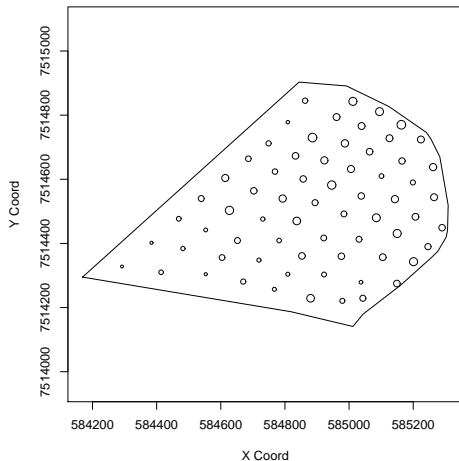
ANÁLISE DESCRITIVA - SATURAÇÃO POR BASES

Gráficos descritivos:



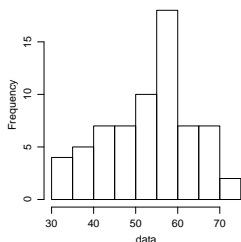
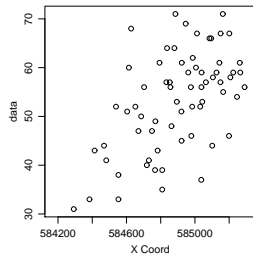
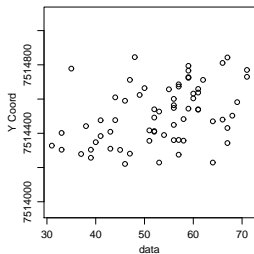
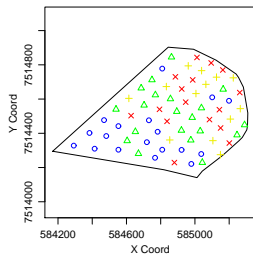
ANÁLISE DESCRITIVA - SATURAÇÃO POR BASES

Gráficos descritivos:



ANÁLISE DESCRITIVA - SATURAÇÃO POR BASES

Gráficos descritivos:



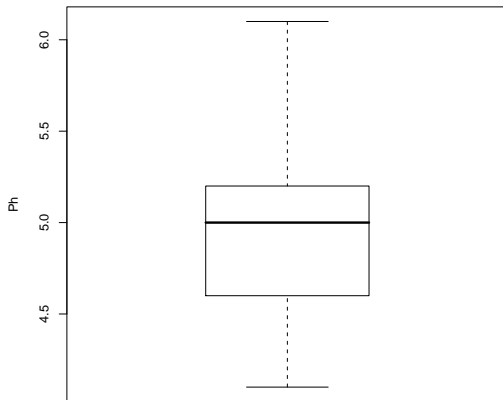
Seguem as estatísticas descritivas do Ph:

Mínimo	Q1	Mediana	Média	D.P.	Q3	Máximo
4.10	4.60	5.00	4.94	0.42	5.20	6.10

TABELA: Estatísticas descritivas do Ph

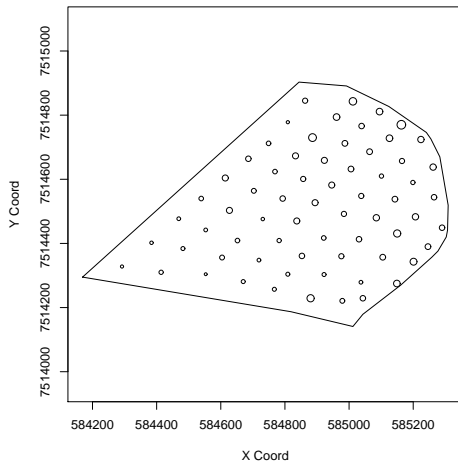
ANÁLISE DESCRITIVA - PH DO SOLO

Gráficos descritivos:



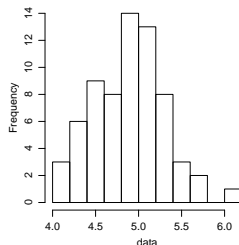
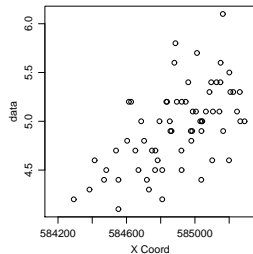
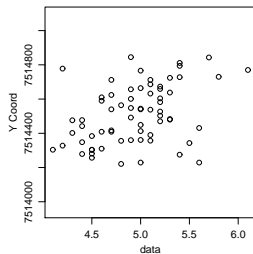
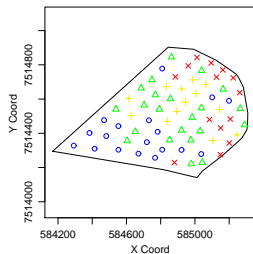
ANÁLISE DESCRITIVA - PH DO SOLO

Gráficos descritivos:



ANÁLISE DESCRITIVA - PH DO SOLO

Gráficos descritivos:



MODELO UNIVARIADO - SATURAÇÃO POR BASES

Pela análise descritiva inicial há forte suspeita que existe padrão espacial para as variáveis, no entanto, também existe há suspeita de não estacionariedade na média do processo, sendo assim serão consideradas as seguintes tendências para média:

- Tendência Constante
- Tendência na Coordenada x
- Tendência na área de manejo

Sendo assim a média possuirá as seguintes possíveis estruturas paramétricas:

$$\mu(s) = \beta$$

$$\mu(s) = \beta_0 + x(s)\beta_1$$

$$\mu(s) = \beta_0 + \beta_1$$

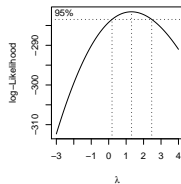
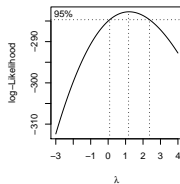
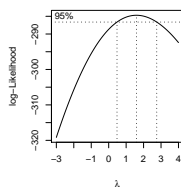
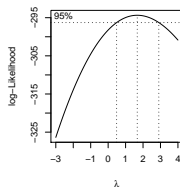
MODELO UNIVARIADO - SATURAÇÃO POR BASES

Com relação as estruturas de covariâncias e correlações foram utilizadas as seguintes suposições:

- Distribuições Gaussianas ao campo aleatório e ao ruído branco
- Estacionariedade das variâncias e covariâncias
- Isotropia
- Função de correlação da Família Matérn
 - $\kappa=1$
 - $\kappa=1.5$
 - $\kappa=2$
 - $\kappa=3$

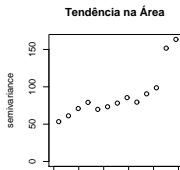
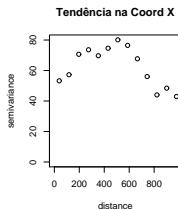
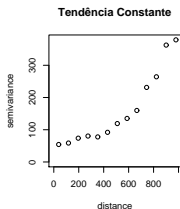
MODELO UNIVARIADO - SATURAÇÃO POR BASES

Para testar os pressupostos quanto a distribuição de probabilidade do campo aleatório foi utilizado a transformação de Box-Cox para cada tendência para a média:



MODELO UNIVARIADO - SATURAÇÃO POR BASES

Com a estrutura das distribuições de probabilidades definidas, pode-se pensar na estimação dos parâmetros, para fazer a estimação de máxima verossimilhança se faz necessário entrar com valores iniciais para os métodos computacionais de estimação, para tal, será analisada estimativas "AD-HOC":



MODELO UNIVARIADO - SATURAÇÃO POR BASES

Resultados da estimação de máxima verossimilhança, método de Nelder-Mead:

β	τ^2	σ^2	ϕ	κ	log-verossim.
48.53	59.57	120.62	625.58	1	-239.8
47.98	62.40	124.31	516.78	1.5	-239.8
47.27	63.29	149.69	489.58	2	-239.7
47.32	63.61	122.37	326.39	3	-239.7

TABELA: Estimativas de Máxima Verossimilhança - Tendência constante

MODELO UNIVARIADO - SATURAÇÃO POR BASES

β_0	β_1	τ^2	σ^2	ϕ	κ	log-verossim.
47.92	8.83	38.78	39.28	59.18	1	-238.00
47.92	8.86	43.35	34.69	50.33	1.5	-237.98
47.92	8.88	45.53	32.47	44.34	2	-237.96
47.44	4.85	64.96	34.57	190.39	3	-239.27

TABELA: Estimativas de Máxima Verossimilhança - Tendência na área de manejo

β_0	β_1	τ^2	σ^2	ϕ	κ	log-verossim.
-14300.66	0.025	27.56	41.46	45.42	1	-234.72
-14300.91	0.025	33.53	35.53	39.51	1.5	-234.70
-14300.17	0.025	36.40	32.68	35.33	2	-234.68
-14297.97	0.025	39.14	29.97	29.74	3	-234.66

TABELA: Estimativas de Máxima Verossimilhança - Tendência na coordenada X

MODELO UNIVARIADO - SATURAÇÃO POR BASES

Considerando os melhores modelos estimados para cada tendência, o próximo passo é selecionar o melhor modelo ajustado, para tal foi utilizado o Critério da Informação de Akaike:

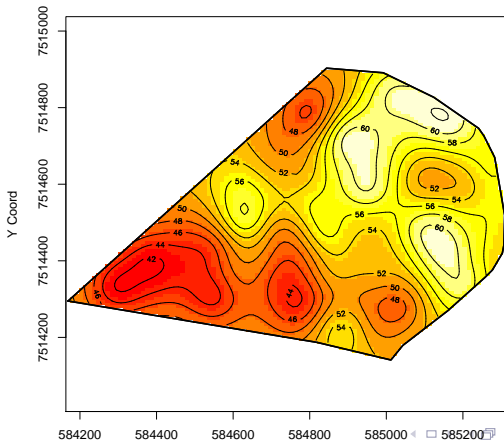
Tendência	κ	AIC
<i>Constante</i>	2	487.499
<i>Constante</i>	3	487.328
<i>Area</i>	1.5	485.9588
<i>Area</i>	2	485.922
<i>Coord.X</i>	2	479.361
<i>Coord.X</i>	3	479.321

TABELA: Critério de informação de Akaike

Sendo assim o melhor modelo ajustado com essa abordagem foi o com tendência na coordenada x para a média com $\kappa=3$.

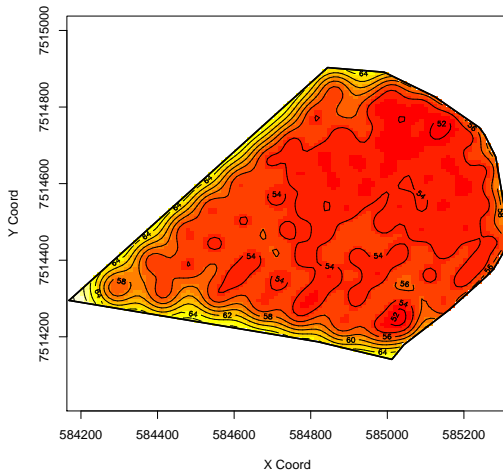
MODELO UNIVARIADO - SATURAÇÃO POR BASES

Com a estrutura de distribuição de probabilidade definida e com os parâmetros estimados, o próximo passo é fazer a krigagem para toda a área de estudo:



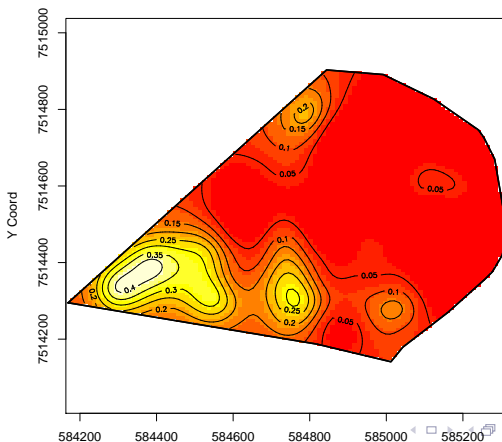
MODELO UNIVARIADO - SATURAÇÃO POR BASES

Agora analisando a variância das predições:



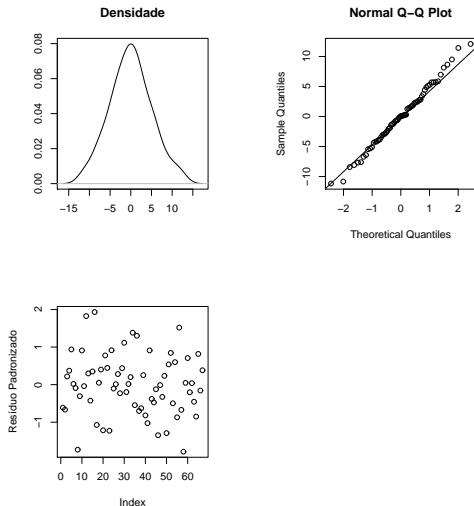
MODELO UNIVARIADO - SATURAÇÃO POR BASES

Valor da Saturação por Bases inferior a 40 indica que o solo está pobre, abaixo seguem as probabilidades dos valores preditos serem inferiores a esse patamar:



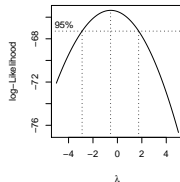
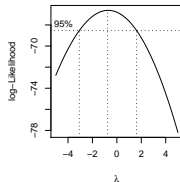
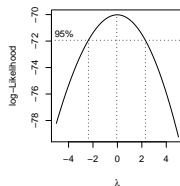
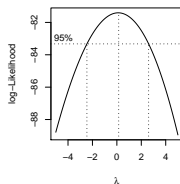
MODELO UNIVARIADO - SATURAÇÃO POR BASES

Por último foi testado o pressuposto quanto a distribuição do ruído branco:

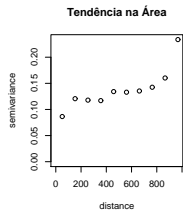
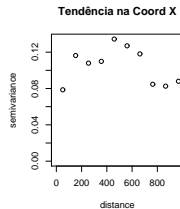
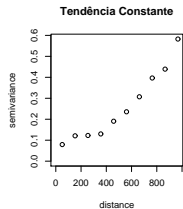


MODELO UNIVARIADO - PH

Para a variável Ph do solo foram considerados os mesmos pressupostos e as mesmas abordagens levadas em consideração para a Saturação por Bases:



Estimação "AD-HOC":



Estimativas de máxima-verossimilhança:

β	τ^2	σ^2	ϕ	κ	log-verossim.
4.905	0.1006	0.1493	510.58	1	-25.69
4.904	0.1055	0.2513	650.50	1.5	-25.57
4.903	0.1061	0.2880	569.74	2	-25.45
4.902	0.1063	0.2961	430.36	3	-25.31

TABELA: Estimativas de Máxima Verossimilhança - Tendência constante

MODELO UNIVARIADO - PH

β_0	β_1	τ^2	σ^2	ϕ	κ	log-verossim.
4.7094	0.4421	0.1220	0.0000	0.0000	1	-24.60
4.7094	0.4421	0.1220	0.0000	0.0000	1.5	-24.60
4.7794	0.2272	0.1100	0.1100	349.35	2	-24.86
4.7880	0.1948	0.1092	0.1092	327.03	3	-24.79

TABELA: Estimativas de Máxima Verossimilhança - Tendência na área de manejo

β_0	β_1	τ^2	σ^2	ϕ	κ	log-verossim.
-584.69	0.001	0.1124	0.0000	0.0000	1	-21.86
-586.88	0.001	0.1050	0.0104	171.76	1.5	-21.71
-608.32	0.001	0.0081	0.1040	24.508	2	-19.36
-584.69	0.001	0.1124	0.0001	822.95	3	-21.89

TABELA: Estimativas de Máxima Verossimilhança - Tendência na coordenada X

Seleção de modelo pelo critério da informação de Akaike:

Tendência	κ	AIC
<i>Constante</i>	1.5	59.147
<i>Constante</i>	2	58.902
<i>Constante</i>	3	58.612
<i>Coord.X</i>	1	53.722
<i>Coord.X</i>	1.5	53.429
<i>Coord.X</i>	2	48.727

TABELA: Critério de informação de Akaike

O modelo final é o com tendência na coordenada x para a média e com $\kappa=2$.

Gráfico da krigagem:

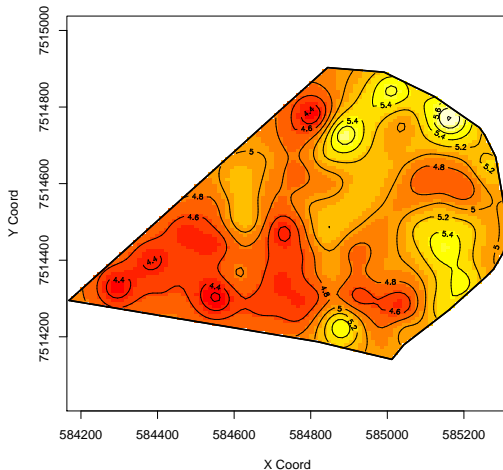
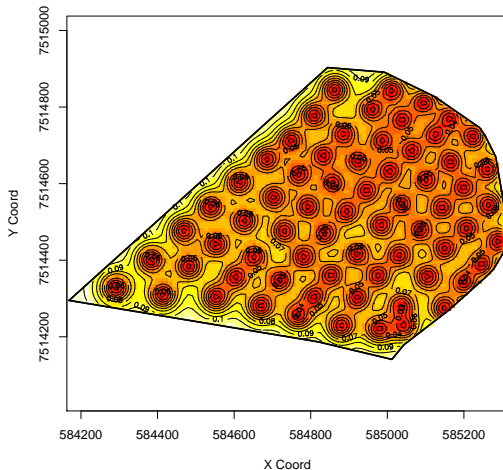
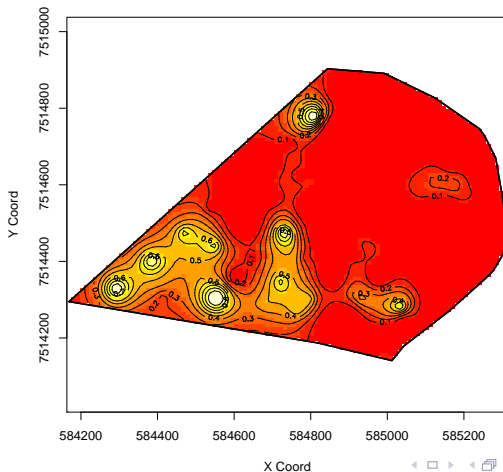


Gráfico das variâncias das predições

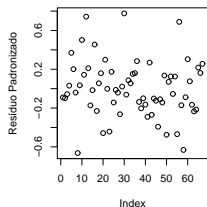
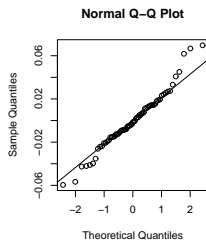
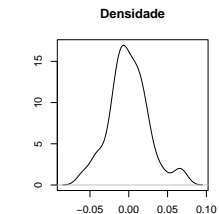


MODELO UNIVARIADO - PH

Valor de Ph inferior a 5 é sinal de que o solo está pobre, sendo assim segue o gráfico das probabilidade do Ph ser inferior a este patamar:



Validação do modelo:



Para a modelagem bivariada ainda existe alguns problemas para estimação dos parâmetros:

- Instabilidade dos métodos computacionais
- Indentificabilidade do modelos
- Não estacionariedade da média

No entanto existem algumas possibilidades para contornar esses problemas:

- Fixar parâmetros através dos resultados univariados
- Utilizar abordagem Bayesiana de estimação

MODELAGEM BIVARIADA

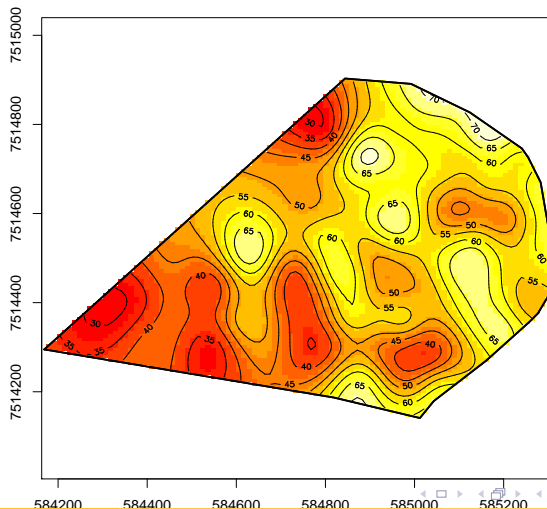
Mesmo com os problemas que ainda existem foram ajustados diversos modelos, seguem os resultados do melhor encontrado:

μ_1	μ_2	σ_{01}^2	σ_1^2	σ_{02}^2	σ_2^2	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2
54.14	5.012	566.9	81.25	1.112	0.017	117.0	45.84	61.29

TABELA: Estimativas de Máxima Verossimilhança

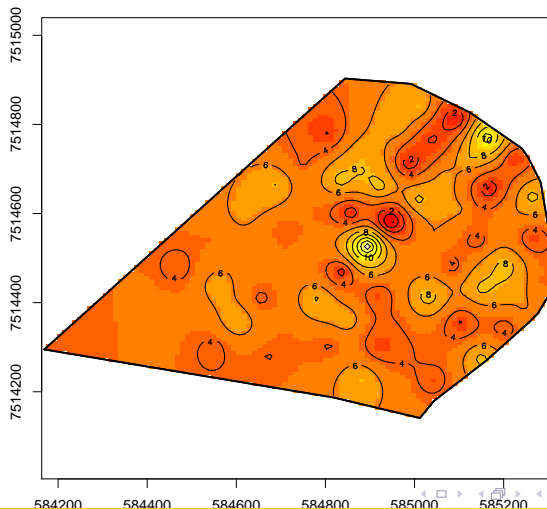
MODELAGEM BIVARIADA

Gráficos da predição para a Saturação:



MODELAGEM BIVARIADA

Gráficos da predição para o Ph:



REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BANERJEE, S.; GELFAND, A.E. Predict, Interpolation and regression for spatial misaligned data points. **Sankhya**, v.64, p.227-245, 2002.

BROWN, P.J.; LE, N.D.; ZIDEK, J.V. Multivariate spatial interpolation and exposure to air pollutants. **The Canadian Journal of Statistics**, v.22, p.489-509, 1994.

CRESSIE N.; HUANG, H-C. Classes of Non-Separable, Spatio-temporal stationary covariance functions. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v.94, p.1330-1340, 1999.

DIGGLE, P.J.; RIBEIRO Jr., P.J. **Model-Based geostatistics**. New York: Springer, 2006. 230p.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ELMATZOGLOU, I. **Spatio-temporal geostatistical models, with an application in fish stock**, 2006. 53 p. Submitted for the degree of (Master in statistics) - Lancaster University, Lancaster, 2006.

FERNANDES, M.V.M. **Modelos para Processos Espaço-Temporais Inflacionados de Zeros**, 2006. 128 p. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Instituto de Matemática da Univeridade Federal do Rio de Janeiro, 2006.

FUENTES, M.; SMITH, R.L. **A new class of stationary spatial models**. North Caroline: Department of Statistics, North Caroline State University, 2001. Technical (Report, 2534).

GELFAND, A.E; SCHMIDT, A.M.; BANERJEE S.; SIRMANS, C.F. Nonstationary multivariate process modeling through spatially varying coregionalization. **Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa - Test**, v.13, p.263-312, 2005.

GNEITING, T. Nonseparable, Stationary Covariance Functions for Space-Time Data. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, v.97, p.590-600, 2002.

HIGDON, D. **Quantitative methods for current environmental issues**, Chichester: Wiley, 2002. 185 p.

LE, D.N.; ZIDEK, J.V. **Statistical analysis of environmental space-time processes**. New York: Springer, 2006. 327p.

MARDIA, K.V.; GOODALL, C.R. Spatial-temporal analysis of multivariate environmental monitoring data. In: G. P. PATIL and C. R. Rao, eds., **Multivariate Environmental Statistics**, p.347-386, 1993.

MATÉRN, B. **Spatial variation**. Verlag, Berlin: Springer, 1986. 365 p.

SAMPSON P.D.; GUTTORP, P. Nonparametric estimation of nonstationary spatial covariance structure. **Journal of American Statistical Association**, Alexandria, v.87, p.108-119, 1992.

SCHABENBERGER, O.; GOTWAY, C.A. **Statistical methods for spatial data analysis**, Boca Raton: Chapman and Hall / CRC, 2005. 488p.

SCHMIDT, A.M.; O'HAGAN, A. Bayesian inference for nonstationary spatial covariance structure via spatial deformations, **Journal of Royal Statistical Society**, Oxford: v.65, p.743-758, 2003.

SCHIMIDT, A.M.; SANSÓ, B. Modelagem bayesiana da estrutura de covariância de processos espaciais e espaço-temporais. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 14, 2006. Caxambú, **Minicurso...** São Paulo: Associação Brasileira de Estatística, 2006. 151 p.

SILVA, A.S. **Modelos gaussianos geoestatísticos espaço-temporais e aplicações**, 2006. 70 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agrônômica) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" da Univeridade de São Paulo, 2006.

SUN, W.; LE, N.D.; ZIDEK, J.V.; BURNETT, R. Assessment of a bayesian multivariate interpolation approach for health impact studies. **Environmetrics**, Washington, v.9, p.565-586, 1998.