Programa

1. **Vetores no Plano e no Espaço:** conceito; adição de vetores; multiplicação de vetor por n° real; combinação linear de vetores; coordenadas; produto interno; produto vetorial; produto misto.

2. **Retas e Planos no Espaço com Coordenadas Cartesianas:** equação da reta: vetorial, paramétrica e geral; paralelismo; perpendicularismo; coplanaridade; ângulo entre retas; equação do plano: vetorial, paramétrica e geral; posições relativas entre planos e retas; problemas de distância.

3. **Curvas no Plano:** equação de lugar geométrico no plano; equações reduzidas da elipse, hipérbole e parábola; equação geral da cônica.

4. **Superfícies:** equação de superfícies: esférica, cilíndrica, cônica e quádrica.

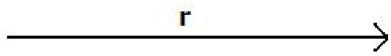
Bibliografia: Winterle, Paulo. - VETORES E G.A. - Makron Books 2000

Sumário

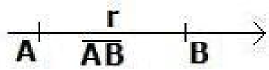
Vetores

1.1 Vetores

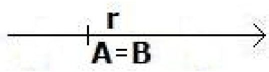
Definição 1.1.1 *Uma reta r é dita orientada quando é fixado um sentido de percurso, considerado positivo e indicado por uma seta e esta também é chamada de EIXO.* □



Definição 1.1.2 *Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o 1° é dito origem e o 2° extremidade.* □



Definição 1.1.3 *Um segmento é dito nulo se a extremidade coincide coma origem.* □

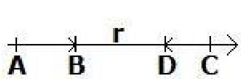


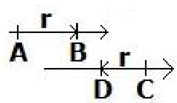
Definição 1.1.4 *A cada segmento orientado podemos associar um n° real não negativo, que é a medida do segmento em relação a uma unidade de medida, chamado de módulo. Notação:* $||AB||$, $|AB|$. □

Observar que:

- $||AB|| \geq 0$ e os segmentos nulos tem comprimento igual a zero, ou seja $\|AB\| = 0$.
- Segmentos opostos tem mesma medida ($||AB|| = ||BA||$).

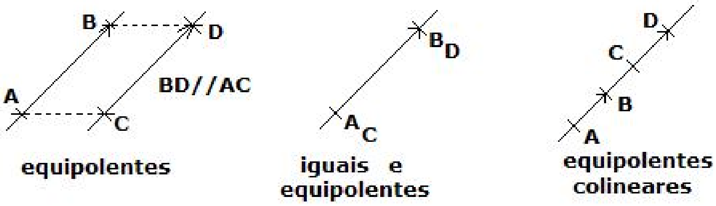
Definição 1.1.5 *Dois segmentos orientados não-nulos AB e CD tem a mesma direção se as retas suportes desses segmentos são paralelas ou coincidentes.* □





Observação: só podemos comparar os sentidos de dois segmentos orientados se eles têm mesma direção.

Definição 1.1.6 *Dois segmentos orientados AB e CD são ditos equipolentes se eles têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo. Notação: $AB \sim CD$.* □



Propriedades da Equipolência:

i) Dois segmentos nulos são sempre equipolentes.

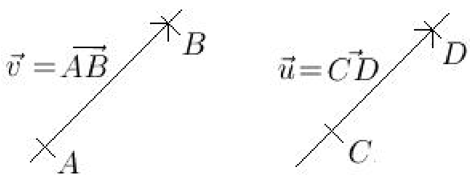
ii) Reflexiva: AB $\sim$ AB.

iii) Simétrica: AB $\sim$ CD $\rightarrow$ CD $\sim$ AB.

iv) Transitiva: AB $\sim$ CD $\sim$ EF $\rightarrow$ AB $\sim$ EF.

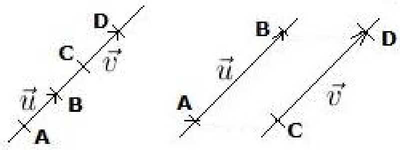
v) Dado um segmento orientado AB e um ponto C, $\exists!$ D / AB $\sim$ CD.

Definição 1.1.7 *O vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB, ou seja, $\vec{v} = (\vec{AB}) = \{XY/XY \sim AB\}$.* □

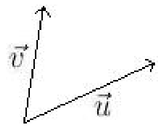


- Dois vetores $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{CD}$ são iguais $\Leftrightarrow AB \sim CD$.
- Os segmentos nulos determinam um único vetor que chamaremos de vetor nulo.
- Dados o vetor $\vec{u} = \vec{AB}$, o vetor $-\vec{u} = \vec{BA}$ é o vetor oposto de $\vec{u} = \vec{AB}$.
- Um vetor $\vec{v}$ é dito unitário se $|\vec{v}| = ||\vec{v}|| = 1$
- A todo vetor diferente do nulo podemos associar um vetor unitário chamado de versor: $\vec{u} = \dfrac{1}{||\vec{v}||}.\vec{v}$

Definição 1.1.8 *Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dito* <u>*vetores colineares*</u> *se tiverem mesma direção, ou seja, se tiverem representantes AB e CD pertencentes a uma mesma reta ou retas paralelas.* □



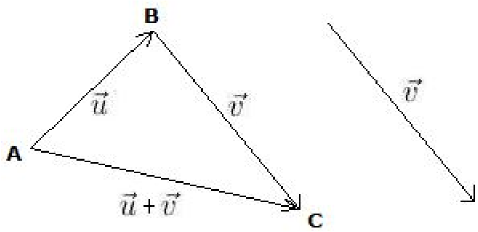
Definição 1.1.9 *Sejam os vetores não-nulos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$ Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$ têm representantes AB, CD, EF, $\ldots$ pertencentes a um mesmo plano, então eles são ditos* <u>*vetores coplanares*</u>. □



Lista 1.1 *Problemas Propostos - Cap. 1 - pg. 14 - 1 e 2.*

1.2 Operações com Vetores

1. <u>Adição:</u> $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



Propriedades:

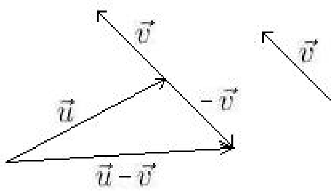
i) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v}$.

ii) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}), \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

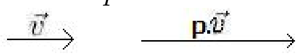
iii) Existência de elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}, \forall \vec{u}$.

iv) Existência de elemento oposto: $\forall \vec{u}, \exists - \vec{u} / \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

2. <u>Subtração (ou diferença):</u> $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



3. Multiplicação por escalar: Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $k \neq 0$. O produto do número real k pelo vetor $\vec{v}$ é o vetor: $\vec{p} = k.\vec{v}$



tal que:

- $|\vec{p}| = |k||\vec{v}|$
- A direção de $\vec{p}$ é a mesma de $\vec{v}$.
- O sentido de $\vec{p}$ é o mesmo de $\vec{v}$ se $k > 0$, e contrário ao de $\vec{v}$ se $k < 0$.

Propriedades: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer e $a, b \in \mathbb{R}$. Então:

i) Associativa: $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$.

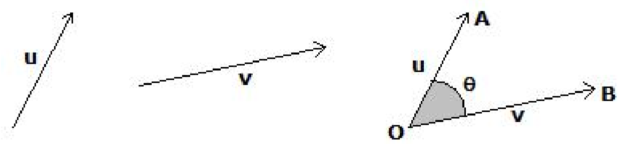
ii) Distributiva em relação à adição de vetores: $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

iii) Distributiva em relação à soma de escalares: $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

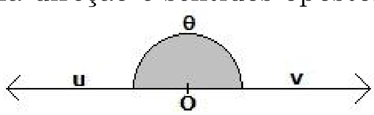
iv) $1\vec{v} = \vec{v}$, $0\vec{v} = \vec{0}$, $k\vec{0} = \vec{0}$.

1.3 Ângulo de Dois Vetores

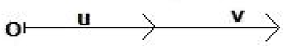
Definição 1.3.1 *O ângulo de dois vetores $\vec{u} = \vec{OA}$ e $\vec{v} = \vec{OB}$ não-nulos, é o ângulo θ formado pelas semi-retas OA e OB e tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.* □



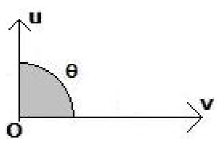
1. Se $\theta = \pi$ então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e sentidos opostos.



2. Se $\theta = 0$ então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido.



3. Se $\theta = \pi/2$ então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais $\vec{u} \perp \vec{v}$



Observações:

1. O vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.
2. Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\vec{u} \perp m.\vec{v}$
3. O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é o suplemento do ângulo θ de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

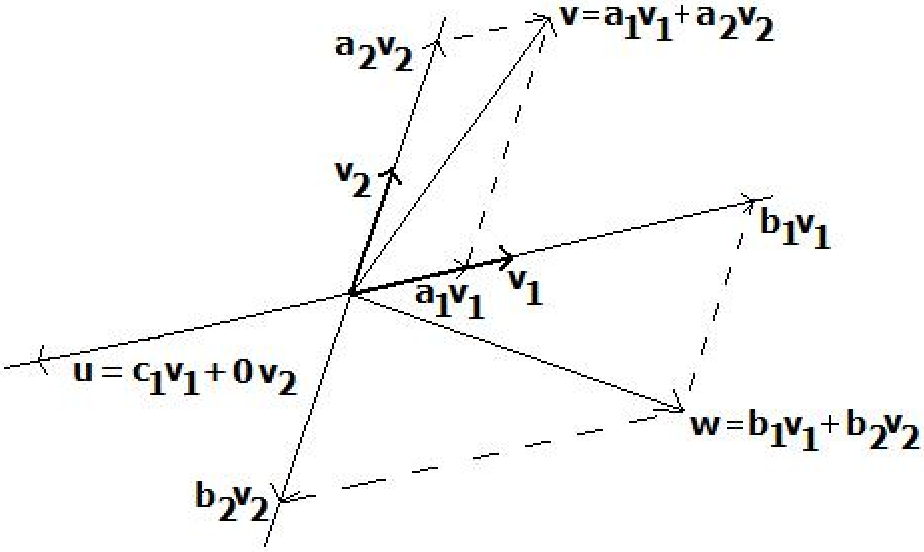
Exemplos pg 06, 09.

Lista 1.2 *Problemas Propostos - Cap. 1 - pg. 14 - 3 ao 16.*

1.4 Decomposição de um Vetor no Plano

Sejam os vetores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ não-colineares. Todo vetor $\vec{v}$ pode ser decomposto segundo as direções de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$.

Achar dois vetores cujas direções sejam as de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ e cuja soma seja $\vec{v}$. Em outras palavras: Queremos achar dois números a_1 e a_2 tais que $\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}$



$\beta = v_1, v_2$ geram o <u>plano</u>.

$$[\vec{v}]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ [\vec{u}]_\beta = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix},\ [\vec{w}]_\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Definição 1.4.1 *Uma combinação linear (CL) dos vetores* $\vec{v}_1$ *e* $\vec{v}_2$ *é um vetor* $\vec{v}/\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$*, onde* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$*.* □

Definição 1.4.2 *Qualquer conjunto* $\{v_1, v_2\}$ *de vetores não-colineares constitui uma base para o plano, ou seja, é um sistema de referência.* □

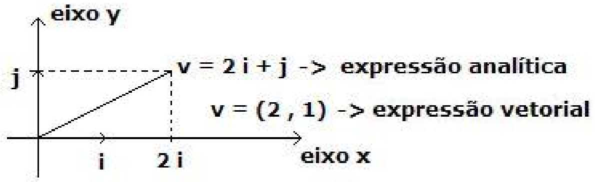
Definição 1.4.3 *Os números* a_1, a_2 *da combinação linear* $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$ *são chamadas coordenadas ou componentes do vetor* $\vec{v}$ *em relação à base* $\{v_1, v_2\}$*.* □

O vetor $a_1\vec{v}_1$ é dito projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{v}_1$ segundo a direção de $\vec{v}_2$.

O vetor $a_2\vec{v}_2$ é dito projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{v}_2$ segundo a direção de $\vec{v}_1$.

As bases mais utilizadas são as bases ortonormais. Uma base é ortonormal se os seus vetores são ortogonais e unitários. $\alpha = \{e_1, e_2\}$. $e_1 \perp e_2$. $|e_1| = |e_2| = 1$.

A base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é dita base canônica do plano, ou seja, $\vec{i} \perp \vec{j}$. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$



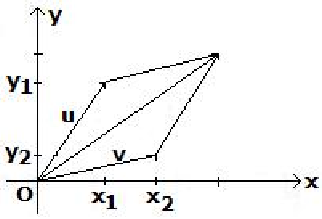
Um vetor no plano é um par ordenado (x, y) de números $\mathbb{R}$ e se representa por $\vec{v} = (x, y)$, que é a expressão vetorial de $\vec{v}$.

Um ponto $P = (x, y)$ pode ser identificado com o vetor $\vec{v} = \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Então, o plano pode ser visto como um conjunto de pontos ou um conjunto de vetores.

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$. $\boxed{\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2}$

Seja $a \in \mathbb{R}$.Então:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $a\vec{u} = a(x_1, y_1) = (a.x_1, a.y_1)$



Exercício: Sejam $\vec{u} = (4, 1)$ e $\vec{v} = (2, 6)$. Calcular $\vec{u} + \vec{v}$ e $3\vec{u}$. Esboçe geometricamente.

Propriedades:

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$.

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

iii) $\exists \vec{o}/\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$

iv) $\forall \vec{u}, \exists - \vec{u}/\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$

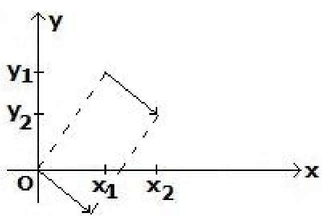
v) $a(b.\vec{u}) = (a.b)\vec{u}$

vi) $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

vii) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

viii) $1.\vec{u} = \vec{u}$

Definição 1.4.4 *Consideremos os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Temos um vetor definido por dois pontos $\vec{AB}$, o vetor: $B - A = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$* $\square$



Exercício: Sejam $A = (-1, 2)$, $B = (3, -1)$ e $C = (-2, 4)$. Calcular $D(x, y)/\vec{CD} = \dfrac{1}{2}\vec{AB}$.

Lista 1.3 *Problemas Propostos - Cap. 1 - pg. 40 - 1 ao 23.*

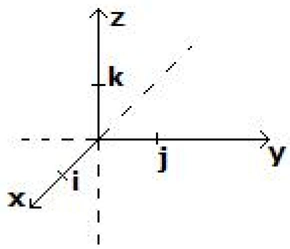
1.5 Decomposição de um Vetor no Espaço

Qualquer conjunto de três vetores <u>não-coplanares</u> $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma <u>base</u> e todo vetor $\vec{v}$ do espaço é combinação linear dos vetores da base, ou seja, sempre existem números reais a_1, a_2, a_3 tais que $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$.

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ e a_1, a_2, a_3 são as <u>coordenadas</u> de $\vec{v}$ em relação à base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Uma base no espaço é <u>ortonormal</u> se os vetores são unitários e dois-a-dois ortogonais.

$\{\vec{i}.\vec{j}, \vec{k}\}$ base canônica. $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}$. $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$.



A dimensão do espaço é dada pelo número de vetores na base. Então:

- O espaço tem dimensão 3.
- O plano tem dimensão 2.
- A reta tem dimensão 1.

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, tais que $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são <u>paralelos</u> (ou <u>colineares</u> ou <u>mesma direção</u>) se $\underbrace{\exists c}_{\neq 0} \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = c\vec{v}$.

Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, então $\vec{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Definição 1.5.1 *Definimos a <u>distância entre dois pontos</u> como o módulo:*

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad \square$$

Lista 1.4 *Problemas Propostos - Cap. 1 - pg. 42 - 24 ao 56.*

Produto Escalar / Produto Interno

2.1 Definição Algébrica

Definição 2.1.1 *Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$. Definimos o produto escalar, ou produto interno, entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por $\vec{u}.\vec{v}$, ao número real $\vec{u}.\vec{v} = (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$.* $\square$

Propriedades do Produto Interno:

i) $\vec{u}.\vec{u} \geq 0, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{u}.\vec{u} = 0 \therefore \vec{u} = \vec{o}$

ii) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

iii) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

iv) $\vec{u}.(m\vec{v}) = m(\vec{u}\vec{v}) = (m\vec{u})\vec{v}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\forall m \in \mathbb{R}$

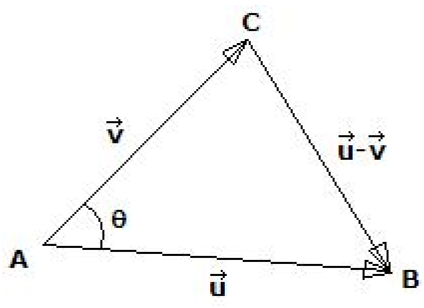
v) $\vec{u}\vec{u} = ||\vec{u}||^2$, $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$

1. Provar que $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\vec{v} + ||\vec{v}||^2$.
2. Provar que $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$.

2.2 Definição Geométrica

Definição 2.2.1 *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não-nulos e θ o ângulo entre eles, então:*

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|. \cos\theta$$ $\square$



Aplicando-se a lei dos cossenos ao triângulo ABC da figura acima temos:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

Por outro lado, de acordo com o análogo para a diferença da primeira prova da seção anterior, ou seja:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\vec{v}$$

Comparando ambas as igualdades acima:

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

e então:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta, 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

- **Desigualdade de Cauchy-Schwarz** $||\vec{u}.\vec{v}|| \leq ||\vec{u}||.||\vec{v}||$

  Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores quaisquer, consideremos os vetores $t.\vec{u}+\vec{v}$, onde $t \in \mathbb{R}$.

  $(t.\vec{u}+\vec{v}).(t.\vec{u}+\vec{v}) = t^2\vec{u}.\vec{u} + 2t\vec{u}\vec{v} + \vec{v}.\vec{v} = ||\vec{u}||^2t^2 + 2\vec{u}\vec{v}t + ||\vec{v}||^2 \geq 0$

  $\Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow (2.\vec{u}.\vec{v})^2 - 4||\vec{u}||^2.||\vec{v}||^2 \leq 0 \Rightarrow 4.|\vec{u}.\vec{v}|^2 \leq 4||\vec{u}||^2.||\vec{v}||^2 \Rightarrow |\vec{u}.\vec{v}| \leq ||\vec{u}||.||\vec{v}||$

- **Desigualdade Triangular** $||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||, \forall \vec{u}, \vec{v}$

  $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 + 2.\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2 \leq ||\vec{u}||^2 + 2.|\vec{u}.\vec{v}| + ||\vec{v}||^2 \leq ||\vec{u}||^2 + 2.||\vec{u}||.||\vec{v}|| + ||\vec{v}||^2 = (||\vec{u}|| + ||\vec{v}||)^2 \Rightarrow ||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$

Lista 2.1 *Problemas Propostos - Cap. 2 - pg 66 - 1 ao 14.*

2.3 Ângulos Entre Vetores

O ângulo entre dois vetores quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vem da igualdade $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}}$$

- $\vec{u}.\vec{v} > 0 \Rightarrow \cos\theta > 0 \Rightarrow 0 \leq \theta < \pi/2$
- $\vec{u}.\vec{v} < 0 \Rightarrow \cos\theta < 0 \Rightarrow \pi/2 < \theta \leq \pi$
- $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$

Definição 2.3.1 Condição de Ortogonalidade:

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Eles são ditos ortogonais quando o produto interno entre eles é nulo. $\vec{u} \perp \vec{v} \therefore \vec{u}.\vec{v} = 0$. □

2.3.1 Ângulos Diretores e Cossenos Diretores de um Vetor

Definição 2.3.2 *Ângulos Diretores de $\vec{v}$:*

Seja o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. São os ângulos diretores do vetor $\vec{v}$:

α: *é o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{i}$*
β: *é o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{j}$*
γ: *é o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{k}$*

□

Definição 2.3.3 *Cossenos Diretores de $\vec{v}$:*

São os cossenos de seus ângulos diretores, ou seja:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}.\vec{i}}{||\vec{v}||||\vec{i}||} = \frac{x}{||\vec{v}||}$$
$$\cos\beta = \frac{\vec{v}.\vec{j}}{||\vec{v}||||\vec{j}||} = \frac{y}{||\vec{v}||}$$
$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{||\vec{v}||||\vec{k}||} = \frac{z}{||\vec{v}||}$$

□

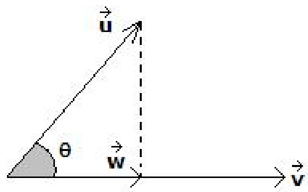
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{||\vec{v}||^2} + \frac{y^2}{||\vec{v}||^2} + \frac{z^2}{||\vec{v}||^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{||\vec{v}||^2} = \frac{||\vec{v}||^2}{||\vec{v}||^2} = 1$$

$$\vec{v} \neq 0, \vec{u} = \frac{1}{||\vec{v}||}.\vec{v} = \frac{1}{||\vec{v}||}.(x,y,z) = \left(\frac{x}{||\vec{v}||}, \frac{y}{||\vec{v}||}, \frac{z}{||\vec{v}||}\right) = \vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Lista 2.2 *Problemas Propostos - Cap. 2 - pg 67 - 15 ao 39.*

2.4 Projeção Ortogonal de um Vetor

Sejam os vetores $\vec{u} \neq 0, \vec{v} \neq 0$ e o ângulo formado por eles.



Queremos calcular o vetor $\vec{w}$ que é a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$. Do triângulo retângulo, $||\vec{w}|| = |||\vec{u}|| \cos\theta| = ||\vec{u}||.|\cos\theta|$ e como $\vec{w}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção, então $\exists c \in \mathbb{R}/\vec{w} = c\vec{v}$, donde $||\vec{w}|| = ||c\vec{v}|| = |c|.||\vec{v}||$. Então:

$$||\vec{u}||.\cos\theta = |c|.||\vec{v}|| \quad \Rightarrow \quad |c| = \frac{||\vec{u}||.|\vec{u}.\vec{v}|}{||\vec{v}||.||\vec{u}||.||\vec{v}||} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{v}||^2} = \frac{\vec{u}\vec{v}}{\vec{v}\vec{v}}$$

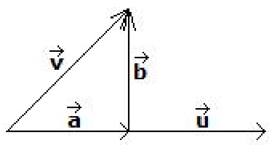
$$\boxed{proj_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{w} = c\vec{v} = \frac{\vec{u}\vec{v}}{\vec{v}\vec{v}}.\vec{v}}$$

Exemplos:

1. $\vec{v} = (20, 4, -10)$ e $\vec{u} = (1, 5, -2)$

   - $proj_{\vec{u}}\vec{v}$?
     $\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\vec{u}.\vec{u}}.\vec{u} = \dfrac{(20) + (20) + (20)}{(1) + (25) + (4)}.\vec{u} = \dfrac{60}{30}.\vec{u} = 2.\vec{u} = (2, 10, -4)$
   - Decomponha $\vec{v}$ como soma de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sendo $\vec{a}//\vec{u}$ e $\vec{b} \perp \vec{u}$.

   $\vec{b} = \vec{v} - \vec{a}$, $(20, 4, -10) - (2, 10, -4) = (18, -6, -6)$

2. Calcule $proj_{\vec{u}-\vec{v}}\vec{u} + \vec{v}$, onde $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (3, 2, 1)$.

   $\vec{u} + \vec{v} = (4, 4, 4)$ e $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 0, 2)$
   $\dfrac{(4, 4, 4).(-2, 0, 2)}{(-2, 0, 2).(-2, 0, 2)} = \dfrac{(-8) + (0) + (8)}{(4) + (4)} = \dfrac{0}{4} = 0.(\vec{u} - \vec{v}) = \underline{(0, 0, 0)}$

3. Calcule m para que $proj_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{1}{2}.\vec{v}$, sendo $\vec{u} = (m, 2, 0)$ e $\vec{v} = (2, m, 0)$.

   $\dfrac{(m, 2, 0).(2, m, 0)}{(2, m, 0).(2, m, 0)} = \dfrac{2m + 2m}{4 + m^2} = \dfrac{4m}{4 + m^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 8m = 4 + m^2 \Rightarrow m = 4 \pm 2.\sqrt{3}$

4. Sejam os pontos $A = (1, 2, -1)$, $B = (-1, 0, -1)$ e $C = (2, 1, 2)$. Então:

   - Mostrar que o ângulo ABC é retângulo em A.
     $\vec{AB} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} = (-2, -2, 0), \vec{AC} = (1, -1, 3) \Rightarrow \vec{AB}.\vec{AC} = (-2) + (2) + (0) = 0.$
   - Calcular a medida de projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.
     $||proj_{\vec{BC}}\vec{AB}|| = \left|\left|\dfrac{AB.BC}{BC.BC}\right|\right|.||BC|| = \dfrac{|AB.BC|}{||BC||^2}.||BC|| = \dfrac{8}{\sqrt{19}}$

$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \dfrac{\vec{v}.\vec{u}}{\vec{u}.\vec{u}}.\vec{u}$. Se $\vec{u}$ é unitário $\Rightarrow proj_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v}.\vec{u}).\vec{u}$.

Seja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, então:

- $proj_{\vec{i}}\vec{v} = x.\vec{i}$
- $proj_{\vec{j}}\vec{v} = y.\vec{j}$
- $proj_{\vec{k}}\vec{v} = z.\vec{k}$

Lista 2.3 *Problemas Propostos - Cap. 2 - pg 69 - 40 ao 50.*

Produto Vetorial

3.1 Definição Algébrica

Sejam os vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_2, y_2, z_2)$.

Definição 3.1.1 *O produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor:*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} .\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} .\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} .\vec{k}$$

□

A definição de $\vec{u} \times \vec{v}$ acima pode ser obtida do desenvolvimento de Laplace. Então, uma maneira fácil de memorizar o produto vetorial é utilizar uma notação simbólica de determinar:

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

Lembrando que o símbolo à direita NÃO é um determinante, pois na primeira linha temos vetores em vez de escalares. Isso é apenas uma notação mais fácil de compreender o cálculo do produto vetorial.

Exemplo: Calcular o produto vetorial: $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$

- $\vec{u} \times \vec{v}$: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} - 5\vec{j} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$
- $\vec{v} \times \vec{u}$ $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{matrix} = 5\vec{j} + 4\vec{k} - 4\vec{i} - 3\vec{j} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

portanto, o produto vetorial NÃO é comutativo.

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}}$$

Propriedades do Produto Vetorial.

i) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{o}$, $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$

ii) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

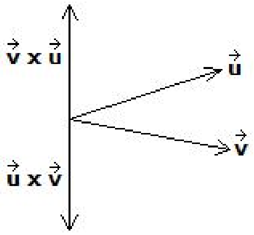
iii) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

iv) $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \alpha(\vec{u} \times \vec{v}), \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^3$

v) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow$ um dos vetores é nulo ou $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares

vi) $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal simultaneamente aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

vii) Os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ têm as direções das arestas de um triédro $Oxyz$ direto.



viii) $||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2.||\vec{v}||^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$

ix) $\vec{u} \neq \vec{o}, \vec{v} \neq \vec{o}$ e θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ então: $||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\sin\theta$

x) O produto vetorial não é associativo: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

Exemplo:

Seja $\vec{u} = (3, 2, -4)$ e $\vec{v} = (2, -2, 1)$. Calcular $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v})$ e $\vec{v}.(\vec{u} \times \vec{v})$

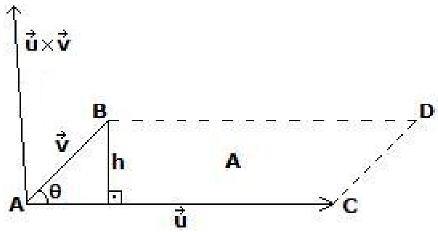
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 8\vec{j} - 6\vec{k} - 4\vec{k} - 8\vec{i} - 3\vec{j} = -6\vec{i} - 11\vec{j} - 10\vec{k} = (-6, -11, -10)$$

$$\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v}) = -18 - 22 + 40 = 0$$

$$\vec{v}.(\vec{u} \times \vec{v}) = -12 + 22 - 10 = 0$$

Lista 3.1 *Problemas Propostos - Cap. 3 - pg 87 - 1 ao 16.*

3.2 Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Vetorial



$A = \text{base} \times \text{altura} = ||\vec{u}||.h = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\sin\theta \Leftrightarrow ||\vec{u} \times \vec{v}||.$

Então, o módulo do produto vetorial $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede a área do paralelogramo $ABCD$ determinado pelos vetores $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AC}$.

Exercícios:

1. Achar um vetor unitário ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -6, 3)$ e $\vec{v} = (4, 3, 1)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -15\vec{i} + 10\vec{j} + 30\vec{k},\ ||\vec{u} \times \vec{v}|| = 35$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{||\vec{u} \times \vec{v}||} = (\frac{-3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}).$$

2. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (0, -1, 3)$. Calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $3\vec{u}$ e $\vec{v} - \vec{u}$.

$$3\vec{u} = (3, 6, -3) \text{ e } \vec{v} - \vec{u} = (-1, -3, 4) \Rightarrow 3\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{u}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 15\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\Rightarrow \sqrt{15^2 + 9^2 + 3^2} = \sqrt{225 + 81 + 9} = \sqrt{315}.$$

3. Sejam os vetores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ e $\vec{v} = (a, 0, 2)$. Calcular o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $2\sqrt{6}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - (6 + a)\vec{j} - a\vec{k} \Rightarrow \sqrt{4 + 36 + 12a + a^2 + a^2} = 2\sqrt{6}$$

$\Rightarrow 2a^2 + 12a + 40 = 24$

$\Rightarrow 2a^2 + 12a + 16$

$\Rightarrow a^2 + 6a + 8 = 0$

$\Rightarrow a = -2$ ou $a = -4$.

4. Calcule a área do triângulo de vértices $A = (1, -2, 1)$, $B = (2, -1, 4)$ e $C = (-1, -3, 3)$.

$AB = (1, 1, 3), AC = (-2, -1, 2)$

$$\Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k} + 2\vec{k} + 3\vec{i} - 2\vec{j} = 5\vec{i} - 8\vec{j} + \vec{k}$$

$$\Rightarrow A_\Delta = \frac{1}{2}(|\vec{AB} \times \vec{AC}|) = \frac{1}{2}\sqrt{25 + 64 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{90} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Lista 3.2 *Problemas Propostos - Cap. 3 - pg 89 - 17 ao 29.*

Produto Misto

4.1 Definição Algébrica

Sejam os vetores:

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \qquad \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \qquad \vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

Do produto vetorial $\vec{v} \times \vec{w}$, temos o vetor:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} .\vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} .\vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} .\vec{k}$$

Fazendo o produto interno entre $\vec{u}$ e $(\vec{v} \times \vec{w})$, $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})$, temos:

$$\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = x_1. \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1. \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Então, denotamos o produto misto por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

Exemplo:

Sejam os vetores: $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.
Calcule: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$, $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$, $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$, $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$.

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27 = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$$

$$(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -27 = (\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}).$$

$\square$

Propriedades do Produto Misto.

i) O produto misto independe da ordem circular dos vetores, ou seja, $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{w},\vec{u},\vec{v}) = (\vec{v},\vec{w},\vec{u})$ ou $(\vec{u},\vec{w},\vec{v}) = (\vec{w},\vec{v},\vec{u}) = (\vec{v},\vec{u},\vec{w})$. Mas muda de sinal quando se trocam as posições de dois vetores consecutivos, ou seja, $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -(\vec{v},\vec{u},\vec{w})$.

ii) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$, então um deles é o vetor nulo <u>ou</u> dois deles são colineares <u>ou</u> os três são coplanares.

iii) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\vec{r}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + (\vec{u},\vec{v},\vec{r})$

iv) $(\vec{u},\vec{v},\alpha.\vec{w}) = \alpha(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

Exemplos:

1. Verificar se os vetores são coplanares: $\vec{u} = (3,-1,4), \vec{v} = (1,0,-1)$ e $\vec{w} = (2,-1,0)$.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow \text{Não são coplanares!}$$

2. Achar o valor de β para que os vetores $\vec{u} = (\beta,2,-1), \vec{v} = (1,-1,3)$ e $\vec{w} = (0,-2,4)$ sejam coplanares.

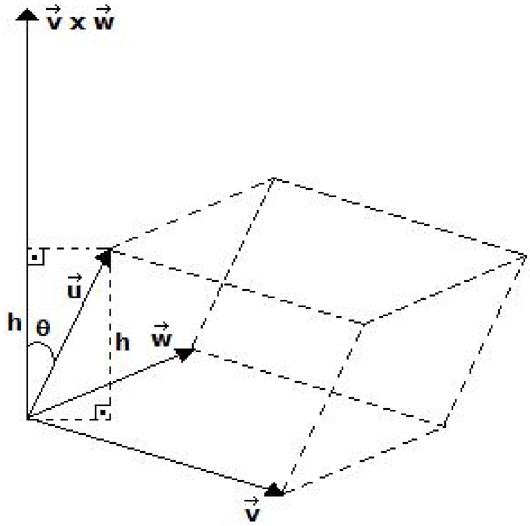
$$\begin{vmatrix} \beta & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4\beta + 2 + 6\beta - 8 = 2\beta - 6 \Rightarrow 2\beta - 6 = 0 \Rightarrow \beta = 3.$$

3. Verificar se os pontos $A = (1,2,4), B = (-1,0,2), C = (0,2,2)$ e $D = (-2,1,-3)$ estão no mesmo plano.

$AB = (-2,-2,-2), AC = (-1,0,-2)$ e $AD = (-3,-1,-7)$.

Então: $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow$ Não são coplanares!

4.2 Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Misto



$V =$ área da base $\times\, h = ||\vec{v} \times \vec{w}||.||\vec{u}||.|\cos\theta| = |||\vec{u}||.||\vec{v} \times \vec{w}||.\cos\theta| = |\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})|$.

Portanto, $V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.

Por conseqüência, o volume do tetraedro é $V_t = \dfrac{1}{6}|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.

Lista 4.1 *Problemas Propostos - Cap. 4 - pg 99 - 1 ao 20.*

A Reta

5.1 Equações da Reta

5.1.1 Equação Vetorial da Reta

Dados um ponto A e um vetor $\vec{v} \neq \vec{o}$. Definimos como a equação vetorial da reta:

$$P \in r \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \vec{AP} = t\vec{v}$$
$$P - A = t\vec{v}$$
$$\boxed{P = A + t\vec{v}, \forall t \in \mathbb{R}}$$

ou

$$\boxed{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)}$$

onde t é o parâmetro da reta, $A = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (a, b, c)$ e $P = (x, y, z)$ um ponto genérico da reta.

Exemplo: Achar a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $A = (3, 0, -5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

$P = (3, 0, -5) + t(2, 2, -1) = (3, 0, -5) + (2t, 2t, -t) = (3 + 2t, 2t, -5 - t)$

5.1.2 Equações Paramétricas da Reta

Sejam: $A = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ e $P = (x, y, z)$

$\Rightarrow \vec{AP} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$

$\Rightarrow (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k} = t(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$, da equação vetorial da reta

$\Rightarrow (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = t(a, b, c) = (ta, tb, tc)$

$\Rightarrow x - x_1 = at$, $y - y_1 = tb$, $z - z_1 = tc$

$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}}$ que são as equações paramétricas da reta.

Exemplo: Achar as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (3, -1, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-3, -2, 1)$. $P = (0, 3, 4) \in r$?

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 3 - 3t \Rightarrow t = +1 \\ 3 = -1 - 2t \Rightarrow t = -2 \\ 4 = 2 + t \Rightarrow t = +2 \end{cases} \Rightarrow P \notin r.$$

5.1.3 Equações Simétricas da Reta

Das equações paramétricas:

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \underbrace{\Longrightarrow}_{abc \neq 0} \begin{cases} t = \dfrac{x - x_1}{a} \\ t = \dfrac{y - y_1}{b} \\ t = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}}$$

Lista 5.1 *Problemas Propostos - Cap. 5 - pg 118 - 1 ao 14.*

5.1.4 Equações Reduzidas da Reta

Considerando as equações simétricas da reta:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c},\ a, b, c \neq 0$$

Tomando a primeira igualdade:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \quad \Rightarrow \quad y = \underbrace{\frac{b}{a}}_{m} x \underbrace{- \frac{b}{a} x_1 + y_1}_{n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = mx + n}$$

Tomando a segunda igualdade:

$$\frac{x - x_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad \Rightarrow \quad z = \underbrace{\frac{c}{a}}_{p} x \underbrace{+ z_1 - \frac{c}{a} x_1}_{q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = px + q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{1} = \frac{y - n}{m} = \frac{z - q}{p}}$$

$\Rightarrow \vec{v} = (1, n, p)$ e $A = (0, n, q)$.

Exemplos:

1) Considere as equações: $\dfrac{2x-1}{3} = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$

a) Mostre que elas representam um reta r.

$\dfrac{\frac{2x-1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{-(y-1)}{2} = \dfrac{z+1}{1} \Rightarrow \dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-(-1)}{1}$, ou seja, $A = (\frac{1}{2}, 1, -1)$ e $\vec{v} = (\frac{3}{2}, -2, 1)$.

b) Elas são equações na forma simétrica de r?

Não

2) Verifique se as retas são iguais.

a) $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 + \frac{1}{2}\mu \end{cases}$

$A_r = (1, 2, 1)$, $v_r = (-1, 2, 1)$

$A_s = (1, 2, 1)$, $v_s = (\frac{-1}{2}, 1, \frac{1}{2})$. sim

b) $r : \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = -\frac{1}{3} + \lambda \\ z = \frac{2}{3} - \lambda \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}$

$A_r = (\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$, $v_r = (-1, 1, -1)$

$A_s = (-1, 1, -1)$, $v_s = (1, -1, 2)$. não

c) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, \frac{-1}{2})$ e $s : X = (0, 1, \frac{1}{2} + \mu(-2, 0, 1))$

$A_r = (1, 1, 0)$, $v_r = (1, 0, \frac{-1}{2})$

$A_s = (0, 1, \frac{1}{2})$, $v_s = (-2, 0, 1)$. sim pois $A_r \in s$.

$(1, 1, 0) = (0, 1, \frac{1}{2} + \mu(-2, 0, 1)) \Rightarrow \mu = \frac{-1}{2}$.

3) Dados $A = (0, 2, 1)$ e $r : X = (0, 2, -2) + t(1, -1, 2)$. Ache os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A. Em seguida, diga se a distância do ponto à reta r é maior, menor ou igual a $\sqrt{3}$, e porquê?

$AX = X - A = (t, -t, -3 + 2t)$
$|AX| = \sqrt{t^2 + t^2 + 9 - 12t + 4t^2}$
$6t^2 - 12t + 9 = 3$
$6t^2 - 12t + 6 = 0$
$t^2 - 2 + 1 = 0$
$t = 1 \Rightarrow X = (1, 1, 0).$

Então a distância do ponto à reta r é igual a $\sqrt{3}$.

4) Idem ao **3)**, mas com $A = (1, 1, 1)$, $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 4 \end{cases}$ e distam $\sqrt{11}$.

$AX = X - A = (t, -t, 3)$
$|AX| = \sqrt{t^2 + t^2 + 9}$
$2t^2 + 9 = 11$
$2t^2 = 2$
$t = \pm 1$
$\Rightarrow X = (2, 0, 4) ou X = (0, 2, 4).$

Então a distância do ponto à reta r é menor a $\sqrt{11}$, pois tem dois pontos que ditam dele á reta por $\sqrt{11}$.

Lista 5.2 *Problemas Propostos - Cap. 5 - pg 119 - 15 ao 18.*

5.2 Retas Paralelas aos Planos Coordenados

Quando uma das componentes de $\vec{v} = (a, b, c)$ é nula, então o vetor $\vec{v}$ é ortogonal a um dos eixos coordenados e a reta r é paralela ao plano coordenado dos outros eixos.

1° caso: $a = 0$

$\Rightarrow \vec{v} = (0, b, c), b \neq 0, c \neq 0 \Rightarrow \vec{v} \perp Ox$ e $r // yOz$.

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}.$$

2° caso: $b = 0$

$\Rightarrow \vec{v} = (a, 0, c), a \neq 0, c \neq 0 \Rightarrow \vec{v} \perp Oy$ e $r//xOz$.

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 \\ z = z_1 + ct \end{cases}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}.$$

3° caso: $c = 0$

$\Rightarrow \vec{v} = (a, b, 0), a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow \vec{v} \perp Oz$ e $r//xOy$.

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 \end{cases}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}.$$

5.3 Retas Paralelas aos Eixos Coordenados

Quando duas das componentes de $\vec{v} = (a, b, c)$ são nulas, então o vetor $\vec{v}$ tem a direção de um dos vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ou $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ou $\vec{k} = (0, 0, 1)$ e a reta é paralela ao eixo que tem a direção de $\vec{i}$ ou de $\vec{j}$ ou de $\vec{k}$.

1° caso: $a = b = 0$

$\Rightarrow \vec{v} = (0, 0, c), c \neq 0 \Rightarrow \vec{v}//\vec{k}$ e $r//Oz$.

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + ct \end{cases}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}.$$

2° caso: $a = c = 0$

$\Rightarrow \vec{v} = (0, b, 0), b \neq 0 \Rightarrow \vec{v}//\vec{j}$ e $r//Oy$.

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 \end{cases}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}.$$

3° caso: $b = c = 0$

$\Rightarrow \vec{v} = (a, 0, 0), a \neq 0 \Rightarrow \vec{v}//\vec{i}$ e $r//Ox$.

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}.$$

5.4 Ângulo de Duas Retas

Dadas as retas $r_1 : \begin{cases} A_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1) \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} A_2 = (x_2, y_2, z_2) \\ \vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2) \end{cases}$, o ângulo de duas retas r_1 e r_2 é o <u>menor</u> ângulo entre um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2.

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1.\vec{v}_2|}{||\vec{v}_1||.||\vec{v}_2||},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{|\vec{v}_1.\vec{v}_2|}{||\vec{v}_1||.||\vec{v}_2||}$$

Exemplo: Achar o ângulo entre as retas: $r : X = (1,1,9) + t(0,1,-1)$ e $s : \begin{cases} x-1 = y \\ z = 4 \end{cases}$.

A reta s pode ser reescrita como $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 4 \end{cases}$, então:

$$\cos\theta = \frac{(0,1,-1).(1,1,0)}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}.\sqrt{(1)^2+(1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ.$$

Lista 5.3 *Problemas Propostos - Cap. 5 - pg 120 - 19 ao 22.*

5.5 Condições Sobre Retas

Sejam as retas r_1 e r_2 com os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

5.5.1 Paralelismo de Duas Retas

$$\boxed{r_1//r_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1//\vec{v}_2} \Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{R}/\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Se as retas r_1 e r_2 são dadas pelas equações reduzidas:

$$r_1 : \begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ z = p_1x + q_1 \end{cases} \text{ e } r_2 : \begin{cases} y = m_2x + n_2 \\ z = p_2x + q_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_1 = (1, m_1, p_1) \text{ e } \vec{v}_2 = (1, m_2, p_2).$$

$$r_1//r_2 \Leftrightarrow 1 = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} m_1 & = & m_2 \\ p_1 & = & p_2 \end{array}}.$$

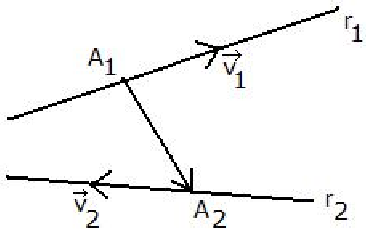
5.5.2 Ortogonalidade de Duas Retas

r_1 é ortogonal a $r_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2 = 0$.

No caso de r_1 e r_2 são dadas na forma reduzida, então $\vec{v}_1 = (1, m_1, p_1)$ e $\vec{v}_2 = (1, m_2, p_2)$, então $1 + m_1 m_2 + p_1 p_2 = 0$, ou seja $\boxed{m_1 m_2 + p_1 p_2 = -1}$.

5.5.3 Coplanaridade de Duas Retas

r_1 e r_2 são coplanares se os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ são coplanares, ou seja, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$.



Posição Relativas de Duas Retas no Espaço.

- Coplanares: $\begin{cases} \text{Concorrentes (um ponto de interseção)} \\ \text{Paralelas (proporcionais)} \end{cases}$

- Reversas: $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0$

5.5.4 Reta Ortogonal a Duas Retas

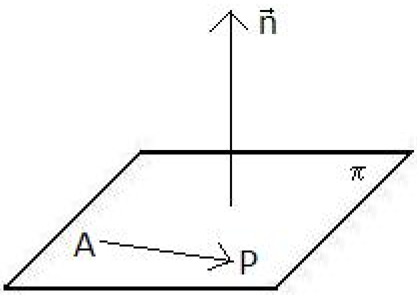
Sejam as retas r_1 e r_2 não paralelas, com as direções $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. A reta r ortogonal às retas r_1 e r_2 ao mesmo tempo, tem a direção do vetor $\vec{v}$, tal que $\vec{v} \perp \vec{v}_1$ e $\vec{v} \perp \vec{v}_2$ e podemos definir esse vetor através do produto vetorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Definido o vetor diretor, a reta r fica determinada quando for conhecido um de seus pontos.

Lista 5.4 *Problemas Propostos - Cap. 5 - pg 120 - 23 ao 34.*

O Plano

6.1 Equação Geral do Plano

Dado $A = (x_1, y_1, z_1)$, pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$. Dizemos que o vetor $\vec{n}$ é <u>normal</u> ao plano π, por tanto $\vec{n} \perp \vec{AP}, \forall P = (x, y, z) \in \pi \Rightarrow \vec{n}.\vec{AP} = 0$.



Sendo $\vec{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$

$\Rightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

$\Rightarrow ax - ax_1 + by - by_1 + cz - cz_1 = 0$

Juntando os termos que não dependem de x, y, z temos: $\boxed{d = ax_1 + by_1 + cz_1}$, ou seja, $d = \vec{n}.A$, logo:

$$\boxed{\pi : ax + by + cz - d = 0}$$

ou

$$\boxed{\pi : ax + by + cz = d}$$

Todos os infinitos planos paralelos a π_1 têm equações do tipo, por exemplo:

$$3x - 5y + z = d, \forall d \in \mathbb{R}$$

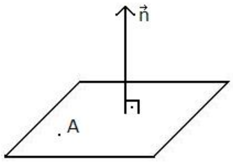
onde d é o elemento que diferencia um plano do outro. Para calcular d precisamos conhecer um ponto do plano (quando $d = 0$, o plano passa pela origem).

Exemplo: Determinar a equação do plano que passa por $A = (1, 1, 1)$ e que tem $\vec{n} = (1, 1, 1)$ como vetor normal.

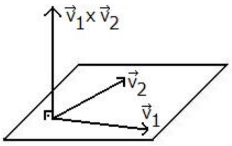
$x + y + z = 3$

6.2 Determinação de um Plano

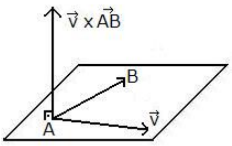
1. Passa por A com o vetor $\vec{n}$ normal.



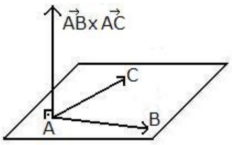
2. Passa por A e é paralelo a dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não colineares. $\boxed{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}$



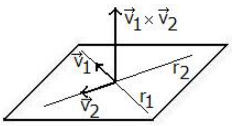
3. Passa por A e B e é paralelo a um vetor $\vec{v}$, não colinear ao vetor $\vec{AB}$ $\boxed{\vec{v} \times \vec{AB}}$



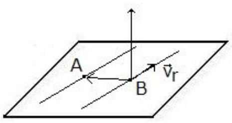
4. Passa por A, B e C não em linha reta. $\boxed{\vec{AB} \times \vec{AC}}$



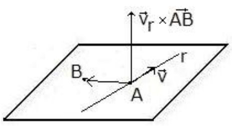
5. Contém duas retas r_1 e r_2 concorrentes. $\boxed{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}$



6. Contém duas retas paralelas (r_1 e r_2). $\boxed{\vec{v}_r \times \vec{AB}}$



7. Contém uma reta r e um ponto $B \notin r$. $\boxed{\vec{v}_r \times \vec{AB}}$



Exemplos:

01) Ache uma equação geral do plano π que passa por $A = (9, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 0, -1)$, $d = 9$ então $x - z = 9$

02) Ache a equação geral do plano que passa pelos pontos: $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 2)$.

$AB = (-2, 0, 0)$ e $AC = (1, 1, 1)$. Então $AB \times AC = (0, 2, -2)$ e $d = -2 \Rightarrow 2y - 2z = -2$

6.3 Planos Paralelos aos Eixos Coordenados

Uma das componentes do vetor normal é nula.

1. $a = 0 \therefore \vec{n} = (0, b, c) \perp Ox, \pi//Ox, by + cz = d, \forall x \in \mathbb{R}$;
2. $b = 0 \therefore \vec{n} = (a, 0, c) \perp Oy, \pi//Oy, ax + cz = d, \forall y \in \mathbb{R}$;
3. $c = 0 \therefore \vec{n} = (a, b, 0) \perp Oz, \pi//Oz, ax + by = d, \forall z \in \mathbb{R}$.

Exemplo: Esboçe o plano de equações:

a) $x + y - 2 = 0$ **b)** $x + z - 2 = 0$ **c)** $3x + 2y + z = 6$

6.4 Planos Paralelos aos Planos Coordenados

Duas das componentes de $\vec{n}$ são nulas.

1. $a = b = 0 \therefore \vec{n} = (0, 0, c)//Oz, \pi//xOy, cz = d \Rightarrow z = \frac{d}{c}$;
2. $b = c = 0 \therefore \vec{n} = (a, 0, 0)//Ox, \pi//yOz, ax = d \Rightarrow x = \frac{d}{a}$;
3. $a = c = 0 \therefore \vec{n} = (0, b, 0)//Oy, \pi//xOz, by = d \Rightarrow y = \frac{d}{b}$;

Exemplo: Qual é a equação do plano xy? Do plano xz? Do plano yz? $(z = 0; y = 0; x = 0)$.

Lista 6.1 *Problemas Propostos - Cap. 6 - pg 141 - 1 ao 4.*

6.5 Equação Vetorial e Equações Paramétricas do Plano

$A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e $P = (x, y, z)$.

$\Rightarrow \vec{AP} = \lambda\vec{u} + t\vec{v} \Rightarrow P - A = \lambda\vec{u} + t\vec{v}$

$\Rightarrow \boxed{P = A + \lambda\vec{u} + t\vec{v}, \lambda, t \in \mathbb{R}}$ *Equação Vetorial do Plano*.

$\Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$

$\Rightarrow (x, y, z) = (x_0 + \lambda a_1 + tb_2, y_0 + \lambda b_1 + tb_2, z_0 + \lambda c_1 + tc_2)$

$$\Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & x_0 & a_1 & + & a_2 t \\ y & = & y_0 & b_1 & + & b_2 t \\ z & = & z_0 & c_1 & + & c_2 t \end{array}\right. \quad \forall\lambda, t \in \mathbb{R}}$$ *Equações Paramétricas do Plano*.

Exemplos:

1) Ache um equação vetorial do plano que contém: $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (0, 0, 1)$.

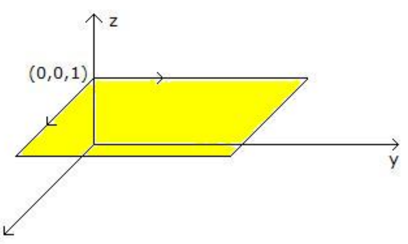
$AB = (1, -1, 1)$ e $AC = (0, -1, 1)$

$(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1) + t(0, -1, 1)$

2) Dê as equações paramétricas do plano que passa pelo ponto $A = (7, 7, 1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 1)$

$$\begin{cases} x = 7 + 1\lambda - 1t \\ y = 7 + 1\lambda \\ z = 1 + 1\lambda + 1t \end{cases}$$

3) Esboçe o plano: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ " $A = (0, 0, 1), \vec{u} = (1, 0, 0), \vec{v} = (0, 1, 0).$ "



Lista 6.2 *Problemas Propostos - Cap. 6 - pg 141 - 5 ao 24.*

6.6 Ângulo Entre Dois Planos

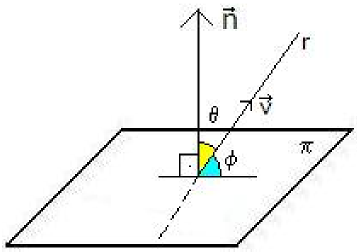
$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1) \perp \pi_1$

$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2) \perp \pi_2$

O ângulo entre pi_1 e π_2 é o menor ângulo que um vetor normal de π_1 forma com com um vetor normal de π_2.

Sendo θ esta ângulo, então: $\boxed{\cos\theta = \dfrac{|n_1.n_2|}{|n_1|.|n_2|}, 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}}$.

6.7 Ângulo entre Reta e Plano



Sendo θ o ângulo entre $\vec{n}$ e $\vec{v}$, e ϕ o ângulo entre $\vec{v}$ e π, temos:

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \Rightarrow \cos\theta = \sin\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = \arcsin\frac{|\vec{n}.\vec{v}|}{|\vec{n}|.|\vec{v}|}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}}.$$

Exemplo: Ache a medida em radianos ao ângulo entre o plano $\pi : y + z - 10 = 0$ e a reta $r : P = (0, 1, 0) + t(-1, -1, 0)$.

$$\vec{n} = (0, 1, 1) \text{ e } \vec{v} = (-1, -1, 0) \Rightarrow \sin\phi\frac{|-1|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}.$$

6.8 Condições Sobre Planos

6.8.1 Condição de Paralelismo e Perpendicularismo de Dois Planos

1. **Paralelismo:** $\pi_1 // \pi_2 \therefore \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \therefore \boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$. "$\underline{d}$ define se são coincidentes ou não".

2. **Perpendicularismo:** $\pi_1 \perp \pi_2 \therefore \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \therefore \boxed{\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0}$.

6.8.2 Condição de Paralelismo e Perpendicularismo entre Reta e Plano

1. **Paralelismo:** $r // \pi \therefore \vec{v} \perp \vec{n} \therefore \boxed{\vec{v}.\vec{n} = 0}$.

2. **Perpendicularismo:** $r \perp \pi \therefore \boxed{\vec{v} // \vec{n}}$.

6.8.3 Reta contida em Plano

$r \in \pi \therefore \vec{v} \perp \vec{n}$ e um ponto $A \in r$ tem que pertencer ao plano π.

Lista 6.3 *Problemas Propostos - Cap. 6 - pg 143 - 25 ao 39.*

6.9 Interseção de Dois Planos

A interseção de dois planos não paralelos é uma reta r.

Como determinar a reta interseção r?

- Conhecendo dois pontos da interseção;
- Conhecendo um ponto e um vetor direção.

Exemplo: Determinar as equações da reta interseção dos planos: $\begin{cases} 5x - 2y + z = -7 \\ 3x - 3y + z = -4 \end{cases}$.

Resolvendo o sistema linear acima: $y = -2x - 3$ e $z = -9x - 13$

$$\Rightarrow r : \begin{cases} y = -2x - 3 \\ z = -9x - 13 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = y \\ y = -3 - 2t \\ z = -13 - 9t \end{cases}$$

6.9.1 Interseção de Reta com Plano

Exemplo: $r : \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 3x - 4 \end{cases}$ e $\pi : 3x + 5y - 2z - 9 = 0$.

$$3x + 5(2x + 3) - 2(3x - 4) = 9 \Rightarrow 7x = -14 \Rightarrow \boxed{x = -2} \Rightarrow \boxed{y = -1} \Rightarrow \boxed{z = -10}.$$

6.9.2 Interseção de Plano com os Eixos Coordenados

$\pi : ax + by + cz = d$

i) Eixo x: $y = z = 0 \Rightarrow x = \dfrac{d}{a}$

ii) Eixo y: $x = z = 0 \Rightarrow y = \dfrac{d}{b}$

iii) Eixo z: $x = y = 0 \Rightarrow z = \dfrac{d}{c}$

6.9.3 Interseção de Plano com os Planos Coordenados

$\pi : ax + by + cz = d$

i) Plano xy: $\Rightarrow \begin{cases} ax + by + cz = d \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{ax + by = d}$

ii) Plano yz: $\Rightarrow \begin{cases} ax + by + cz = d \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{by + cz = d}$

iii) Plano xz: $\Rightarrow \begin{cases} ax + by + cz = d \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{ax + cz = d}$

Lista 6.4 *Problemas Propostos - Cap. 6 - pg 144 - 40 ao 50.*

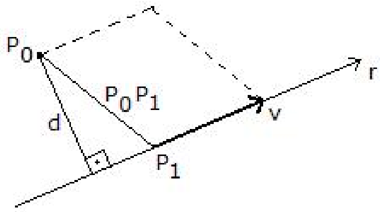
Distâncias

7.1 Entre Dois Pontos

Dados $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$\Rightarrow \boxed{d(P_1, P_2) = ||\vec{P_1P_2}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$

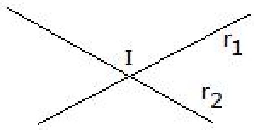
7.2 De um Ponto a uma Reta



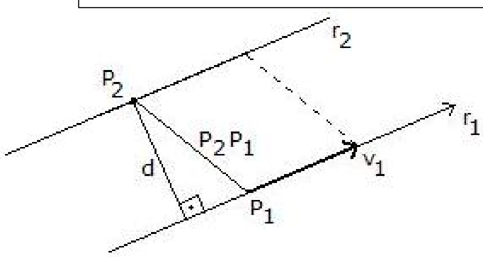
Dados $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $r : \begin{cases} P_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{v} = (a, b, c) \end{cases} \Rightarrow \boxed{d(P_0, r) = \dfrac{||\vec{v} \times \vec{P_1P_0}||}{||\vec{v}||}}$

7.3 Entre Duas Retas

1. **Retas Concorrentes:** $\boxed{d(r_1, r_2) = 0}$



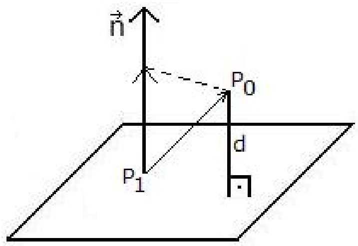
2. **Retas Paralelas ($r_1 \neq r_2$):** $\boxed{d(r_1, r_2) = d(P_2, r_1) = d(r_2, P_1)}$



3. **Retas Reversas:** $\boxed{d(r_1, r_2) = \dfrac{|(\vec{P_1P_2}, \vec{v}_2, \vec{v}_1)|}{||\vec{v}_2 \times \vec{v}_1||}}$

7.4 De um Ponto a um Plano

Dados $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_1 \in \pi$, $\pi : ax + by + cz = d$



$$d(P_0, \pi) = \|proj_{\vec{n}} P_1\vec{P}_0\| = \frac{|P_1\vec{P}_0.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|^2}.\|\vec{n}\| \Rightarrow \boxed{d(P_0, \pi) = \frac{|P_1\vec{P}_0.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$

7.5 Entre Dois Planos

Dados $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

1. $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{o} \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \neq \oslash \Rightarrow \boxed{d(\pi_1, \pi_2) = 0}$
2. $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{o} \Rightarrow \pi_1 // \pi_2$
   - Se $d_1 = d_2 \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 \Rightarrow \boxed{d(\pi_1, \pi_2) = 0}$
   - Se $d_1 \neq d_2 \Rightarrow \pi_1 \neq \pi_2 \Rightarrow \boxed{d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2)}$

7.6 De uma Reta a Um Plano

Dados $\pi = ax + by + cz = d$ e $r : \begin{cases} P \\ \vec{v} \end{cases}$

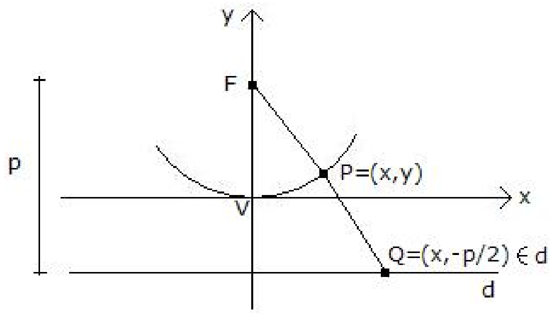
1. Se $\pi \cap r \neq 0 \Rightarrow \boxed{d(r, \pi) = 0}$
2. Se $\pi \cap r = 0 \Rightarrow r // \pi \Rightarrow \boxed{d(r, \pi) = d(P, \pi)}$, $P \in r$

Lista 7.1 *Problemas Propostos - Cap. 7 - pg 157 - 1 ao 25.*

Cônicas

8.1 Parábola

Consideremos num plano, uma reta d e um ponto $F \notin d$. PARÁBOLA é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de F e d, ou seja, $d(F,P) = d(P,d)$.



$P \in$ parábola $\Leftrightarrow d(F,P) = d(P,d)$

Elementos da Parábola:

- F - foco.
- d - diretriz da parábola.
- eixo - é a reta passando por F e $\perp$ à d.
- V - vértice (interseção do eixo com a parábola).

8.1.1 Equação da Parábola com vértice na origem $V = (0,0)$

1. Eixo da parábola coincidindo com o eixo y.

   $F = (0, p/2), Q = (x, -p/2)$

   $d(F,P) = d(P,Q) \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-p/2)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p/2)^2}$

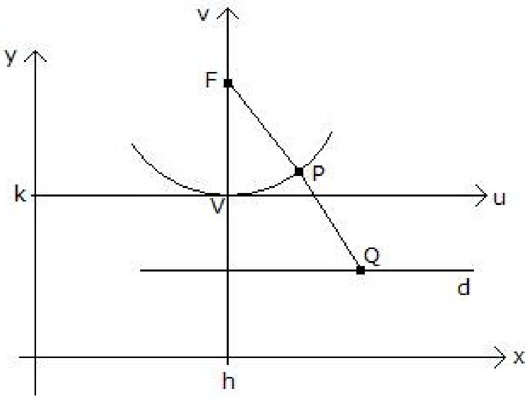
   $\Rightarrow x^2 + y^2 - py + \dfrac{p^2}{4} = \dfrac{p^2}{4} + py + y^2 \Rightarrow \boxed{x^2 = 2py}$

2. Eixo da parábola coincidindo com o eixo x.

   Analogamente: $\boxed{y^2 = 2px}$

8.1.2 Equação da Parábola com vértice fora da origem $V = (h, k)$

1. Dado $u^2 = 2pv \Rightarrow (x-h)^2 = 2p(y-k)^2$



$$\begin{cases} u = x - h \\ v = y - k \end{cases}$$

2. Dado $v^2 = 2pu \Rightarrow (y-k)^2 = 2p(x-h)$

Exemplos:

1) $x^2 - 6x + 8y + 17 = 0$, determine V, F, d.

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + 8y + 17 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + 8y + 8 = 0 \Rightarrow \underbrace{(x-3)}_{u}{}^{2} = \underbrace{-8}_{2p}\underbrace{(y+1)}_{v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = x - 3 \\ v = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u + 3 \\ y = v - 1 \end{cases}$$

Como $d = -p/2$ e $F = (0, p/2)$, então: $V = (3, -1), F = (3, -3), d = \{y = 1\}$

2) $y^2 - 4y + 8x - 20 = 0$, determine V, F, d.

$$\Rightarrow y^2 - 4y + 4 - 4 + 8x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 + 8x - 24 = 0 \Rightarrow \underbrace{(y-2)}_{v}{}^{2} = \underbrace{-8}_{2p}\underbrace{(x-3)}_{u}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = x - 3 \\ v = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u + 3 \\ y = v + 2 \end{cases}$$

Como $d = -p/2$ e $F = (p/2, 0)$, então: $V = (3, 2), F = (1, 2), d = \{x = 5\}$.

8.1.3 Equação da Parábola na Forma Explícita

$$(x-h)^2 = 2p(y-k) \Rightarrow x^2 - 2hx + h^2 = 2py - 2pk \Rightarrow y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{h}{p}x + \frac{h^2}{2p} + k$$

$$\Rightarrow y = ax^2 + bx + c$$

Exemplo: $y = 4x^2 - 16x + 15$

$$\frac{1}{2p} = 4 \Rightarrow p = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{-h}{p} = -16 \Rightarrow h = 2 \Rightarrow \frac{h^2}{2p} + k = 15 \Rightarrow k = -1$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = \frac{1}{4}(y+1) \text{ e } V = (2,-1), F = (2,-15/16), d = \{y = -17/16\}$$

8.1.4 Equações Paramétricas da Parábola

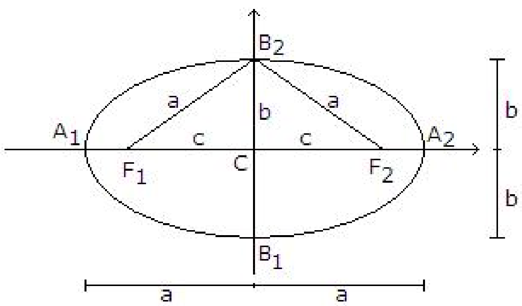
$$x^2 = 2py \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{2p}t^2 \end{cases}$$

$$y^2 = 2px \Rightarrow \begin{cases} y = t \\ x = \dfrac{1}{2p}t^2 \end{cases}$$

Lista 8.1 *Problemas Propostos - Cap. 8 - pg 172 - 1 ao 54.*

8.2 Elipse

É o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante.



$d(F_1,F_2)=2c$; $a>c\geq 0$ - $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$; $d(A_1,A_2)=2a$; $d(P,F_1)=d(P,F_2)$ e $b^2=a^2-c^2$

Elementos da Elipse:

- F_1 e F_2 - focos;
- $2c$ - distância focal;
- A_1A_2 - eixo maior;
- B_1B_2 - eixo maior;
- C - centro;
- A_1,A_2,B_1,B_2 - vértices;
- $e=\dfrac{c}{a}$ - excentricidade da elipse. $(0\leq e\leq 1)$

Desenvolvimento da equação:

$A_1=(-a,0)$; $B_1=(0,-b)$; $F_1=(-c,0)$ e $P=(x,y)$

$A_2=(a,0)$; $B_2=(0,b)$; $F_2=(c,0)$

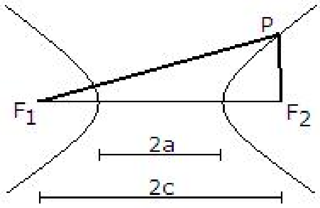
$$\Rightarrow \sqrt{(x-(-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$
$$\sqrt{x^2+y^2+2cx+c^2}=2a-\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}$$
$$\left(\sqrt{x^2+y^2+2cx+c^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}\right)^2$$
$$x^2+y^2+2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}+x^2+y^2-2cx+c^2$$
$$a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}=a^2-cx$$
$$a^2(x^2+y^2-2cx+c^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$
$$a^2x^2+a^2y^2-2a^2cx+a^2c^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$
$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Lista 8.2 *Problemas Propostos - Cap. 8 - pg 189 - 1 ao 45.*

8.3 Hipérbole

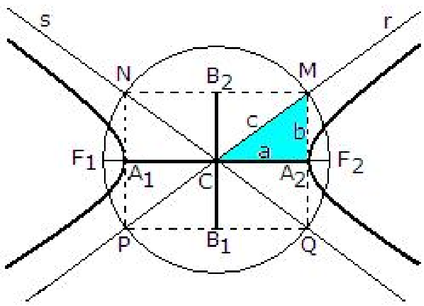
É o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias aos focos, em módulo, é constante.



Elementos da Elipse:

- F_1 e F_2 - focos;
- $2c$ - distância focal;
- A_1, A_2 - vértices;
- assíntotas;
- eixo real;
- eixo imaginário;
- $e = \dfrac{c}{a}$ - excentricidade da hipérbole.

Desenvolvimento da Equação:[1]



$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Lista 8.3 *Problemas Propostos - Cap. 8 - pg 204 - 1 ao 12.*

[1]O desenvolvimento da equação da hipérbole esta oculto inclusive no livro, mas análogo à elipse.

8.4 Equação Geral das Cônicas

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}, \text{ com } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

1) $x^2 + y^2 + 1 = 0$: VAZIO

2) $x^2 + y^2 = 0$: PONTO

3) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$:

$\Rightarrow (x+y)^2 = 0 \Rightarrow x = -y$ RETA

4) $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$:

$\Rightarrow x^2+xy+y^2+xy+x+y = 0 \Rightarrow x(x+y)+y(x+y)+(x+y) = 0 \Rightarrow (x+y)(x+y+1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ y = -x - 1 \end{cases}$ UNIÃO RETAS PARALELAS

5) $x^2 - y^2 = 0$:

$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$ RETAS CONCORRENTES

6) $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$:

$x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{\frac{1}{2}})^2} = 1$ ELIPSE

7) $x^2 - y^2 = 1$: HIPÉRBOLE

8) $x - y^2 = 0$: $\Rightarrow x = y^2$ PARÁBOLA

9) $x^2 + y^2 = 1$: CIRCUNFERÊNCIA DE RAIO 1

Em resumo:

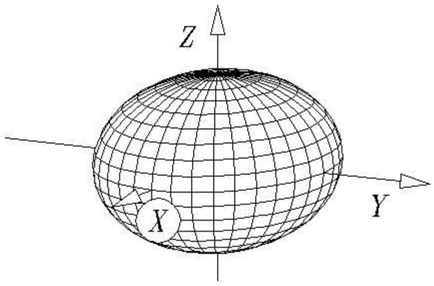
1. Se $B^2 - 4AC < 0 \Longrightarrow$ então a equação é do tipo <u>elíptico</u> (elipse, ponto ou vazio)
2. Se $B^2 - 4AC = 0 \Longrightarrow$ então a equação é do tipo <u>parabólico</u> (vazio, parábola, reta, união de retas paralelas)
3. Se $B^2 - 4AC > 0 \Longrightarrow$ então a equação é do tipo <u>hiperbólico</u> (hipérbole, união de retas concorrentes)

Superfícies Quádricas

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0}$$

com $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0$.

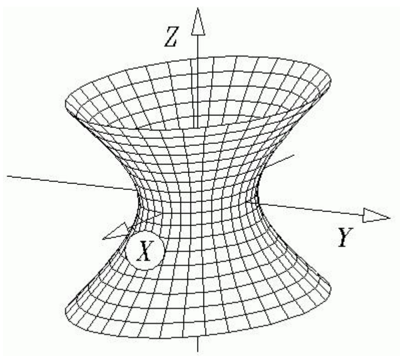
9.1 Elipsóides



Considerando uma elipse num dado plano, se girarmos esse elipse em torno do seu eixo maior, obteremos um *elipsóide de revolução*, cuja equação é da forma: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1}$ e se $a = b = c$, temos $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0$ é uma *superfície esférica* de centro $(0, 0, 0)$ e raio a.

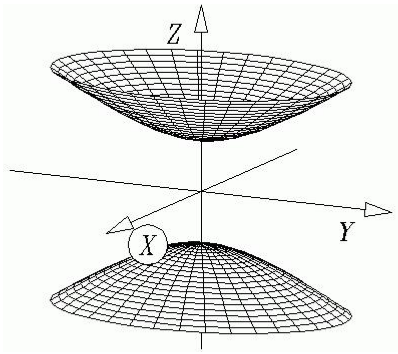
9.2 Hiperbolóides

9.2.1 Hiperbolóide de Uma Folha



Fazendo-se a rotação de um hiperbolóide em torno do seu eixo imaginário, obtemos o hiperbolóide de uma folha, que tem equação: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1}$, podendo o sinal negativo (ao lado da variável z) ser trocado em x ou y.

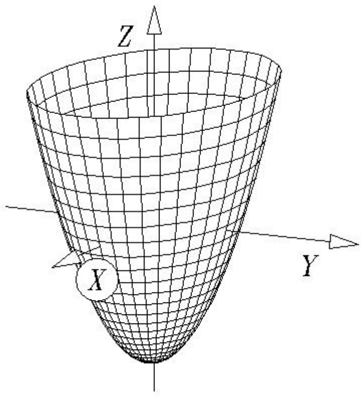
9.2.2 Hiperbolóide de Duas Folhas



Fazendo-se a rotação de um hiperbolóide em torno do seu eixo real, obtemos o hiperbolóide de uma folha, que tem equação: $\boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$, podendo o sinal negativo (ao lado da variável x e z) ser trocado em x e y ou y e z.

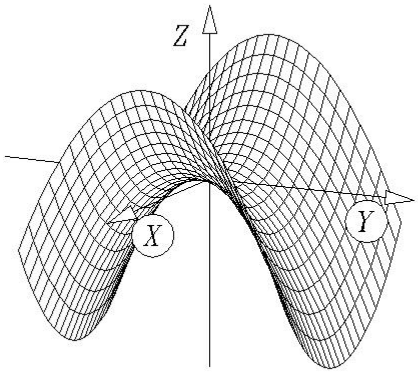
9.3 Parabolóides

9.3.1 Parabolóide Elíptico



A rotação de uma parábola em torno do seu eixo resulta num parabolóide elíptico de equação: $\boxed{z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$, tendo as variações do z para x (e vice-versa) e z para y (e vice-versa).

9.3.2 Parabolóide Hiperbólico



A superfície dada por uma equação do tipo: $\boxed{z = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2}}$ é denominada parabolóide hiperbólico, tendo as variações do z para x (e vice-versa) e z para y (e vice-versa).