# ENVUMV.

1) Seja $f(x;\theta) = \theta^{x}(1-\theta)^{1-x}$, $x = 0,1$. Encontre o ENVUMV.

R: Sabemos que

$$V(\hat{\theta}) \geq 1/nI_F(\theta) \text{ em que,}$$

$$I_F(\theta) = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right]^2$$

$$= -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right].$$

i) $\log f(x;\theta) = x\log\theta + (1-x)\log(1-\theta)$

$$\frac{\partial \log f(x;\theta)}{\partial\theta} = \frac{x}{\theta} + \frac{(1-x)}{1-\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \log f(x;\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{x}{\theta^2} - \frac{1-x}{(1-\theta)^2}$$

$$I_F(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right] = \frac{\theta}{\theta^2} + \frac{1-\theta}{(1-\theta)^2} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

ii) Seja $\bar{X}$ estimador não viciado de $\theta$, $E(\bar{X}) = \theta$.

$V(\bar{X}) = \dfrac{\theta(1-\theta)}{n}$. Como $Var(\bar{X}) = LICR$, $\bar{X}$ é ENVUMV.

2) Seja $X \sim f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$, $x > 0$, com $\begin{cases} E(X) = \theta \\ V(X) = \theta^2 \end{cases}$

Verifique se $\bar{X}$ é o ENVUMV.

i) $\log f(x;\theta) = -\log\theta - \frac{x}{\theta}$

$$\frac{\partial \log f(x;\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \log f(x;\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2x}{\theta^3}$$

$$I_F(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \log f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right) = \frac{-1}{\theta^2} + \frac{2\theta}{\theta^3} = \frac{1}{\theta^2}$$

Então $LICR = \frac{1}{n I_F(\theta)} = \frac{\theta^2}{n}$

ii) $E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum E(X_i) = \frac{n\theta}{n} = \theta$

$V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum Var(X_i) = \frac{n\theta^2}{n^2} = \frac{\theta^2}{n}$

Como $Var(\bar{X}) = LICR$, $\bar{X}$ é ENVUMV.

TEO: (Rao Blackwell, Lehmann-Scheffé): Sejam $X_1, \dots X_n$ a.a. $\sim f(\cdot;\theta)$ e seja a estat. suf. $T(X_1, X_2, \dots X_n)$ p/ $\theta$ e $\hat{\theta}$ estimador não-viciado de $\theta$. Então,

$$\varphi(T) = \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta} \mid T) \text{ é ENVUMV de } \theta.$$

3) Considere uma amostra de tamanho $n$ de

$$X \sim f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x) \quad , \theta > 0$$

Verifique se $\hat{\theta} = X_{(n)}$ é ENVUMV.

- $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = ?$

$$f_{X_{(n)}}(x) = n \frac{2x}{\theta^2} \left[\frac{x^2}{\theta^2}\right]^{n-1} = \frac{2n}{\theta^{2n}}(x^{2n-1})$$

Assim,

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(X_{(n)}) = \int_0^\theta x \cdot \frac{2n(x^{2n-1})}{\theta^{2n}}\, dx = \frac{2n}{\theta^{2n}} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_0^\theta$$

$$= \frac{2n}{\theta^{2n}} \cdot \frac{\theta^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2n\theta}{2n+1}.$$

$\Rightarrow \hat{\theta}^* = \dfrac{2n+1}{2n}\hat{\theta}$ é um estimador não viciado

Sabemos que $X_{(n)}$ é suficiente p/ $\theta$ pois

$$f(x;\theta) = \frac{(2x)^n}{\theta^{2n}} \, \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_{(n)}).$$

E é completa,

$$E(g(x_{(n)})) = \int_0^\theta g(x_{(n)}) \cdot \frac{2n(x^{2n-1})}{\theta^{2n}} dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta g(x_{(n)}) \cdot x^{2n-1} dx = 0, \ \forall \ \theta \in \Theta$$

Derivando com relação a x temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\theta g(x_{(n)}) x^{2n-1} dx = g(\theta)\theta^{2n-1} = 0$$

$\Rightarrow g(x_{(n)}) = 0 \ \ \forall \ \theta \in \Theta$. Então $X_{(n)}$ é completa.

Como $S = X_{(n)}$ é suf. e completa e $\hat{\theta}^* = \left(\frac{2n+1}{2n}\right) X_{(n)}$ um estimador não viciado de $\tau(\theta) = \theta$,

Pelo Teo. de Scheffé $\hat{\theta}^*$ é um ENVUMV.

4) Considere uma amostra aleatória de Tamanho n de uma uniforme $U(a\theta, b\theta)$, $\theta > 0$ e as constantes a e b conhecidas Tq $a \le 0 \le b$

Obtenha o ENVUMV p/ $\theta$, se $a = -1$ e $b = 1$.

R: $f_X(\underline{x};\theta) = \left(\dfrac{1}{\theta(b-a)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[a\theta, b\theta]}(x_i)$

$$= \left(\dfrac{1}{2\theta}\right)^n \mathbb{1}_{(|X_n|, \infty)}(\theta).$$

Pelo critério da fatoração $|X_n|$ é suf. p/ $\theta$.

Lembremos que se $X \sim U(-\theta,\theta) \Rightarrow |X| \sim U(0,\theta)$.

$$F_{|X_n|}(x) = F^n_{|X|}(x) = \left(\dfrac{x}{\theta}\right)^n \Rightarrow f_{|X_{(n)}|}(x) = \dfrac{n x^{n-1}}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x)$$

Vamos provar que $|X_{(n)}|$ é completa.

$$E(g(|X_{(n)}|)) = 0 \iff \int_0^\theta g(|X_{(n)}|) \cdot \dfrac{n x^{n-1}}{\theta^n}\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta g(|X_{(n)}|) \cdot x^{n-1}\, dx = 0$$

$$\dfrac{\partial}{\partial\theta} \int_0^\theta g(|X_{(n)}|) x^{n-1}\, dx = 0 \iff \theta^{n-1} g(\theta) = 0, \quad \theta^{n-1} > 0$$

$$g(\theta) = 0, \ \forall\, \theta \in (\mathbb{R})$$

Portanto $g(|X_{(n)}|) = 0$. Então $|X_{(n)}|$ é completa.

Vamos encontrar $E(|X_{(n)}|)$.

$$E(|X_{(n)}|) = \int_0^\theta \frac{x\, n\, x^{n-1}}{\theta^n}\, dx = \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^\theta$$

$$= \frac{n\theta}{(n+1)}$$

Então seja $\hat{\theta}^* = \frac{(n+1)}{n} |X_{(n)}|$ um estimador não viciado de $\theta$.

Pelo Teo de Scheffé $\hat{\theta}^*$ é ENVUMV.

5) Para estudar o número de carros que passam por certa rodovia é considerada a distribuição de Poisson:

$$P(X=k) = \frac{\theta^k}{(e^\theta - 1)k!}, \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

Com $E(X) = \frac{\theta e^\theta}{e^\theta - 1}$

Sabemos que pelo menos um carro passa em cada período observado. Para $n \geq 2$ obtenha o ENVUMV p/ $\theta$.

$\underline{R}$: Como $E(X) = \dfrac{\theta e^{\theta}}{e^{\theta}-1}$ então $\hat{\theta}^* = \dfrac{e^{\theta}-1}{n e^{\theta}} \sum x_i$

é um estimador não viciado de $\theta$, pois

$$E(\hat{\theta}^*) = E\left(\frac{e^{\theta}-1}{n e^{\theta}} \sum x_i\right) = \frac{(\cancel{e^{\theta}-1})\cancel{n}}{\cancel{n}\cancel{e^{\theta}}} \cdot \frac{\theta \cancel{e^{\theta}}}{(\cancel{e^{\theta}-1})} = \theta .$$

Como a dist. de $\underset{\sim}{X}$ pertence a família exponencial e $T(\underset{\sim}{x}) = \sum x_i$ é suf. e completa Então, $\hat{\theta}^*$ é uma função de $T$ e pelo Teo. de Scheffé $\hat{\theta}^*$ é ENVUMV.

6) Suponha que $n$ peças de equipamentos são submetidas a teste e que suas taxas de falhas $X_1, \dots X_n$ formam uma a.a da densidade exponencial com valor esperado $1/\theta$. Queremos estimar a probabilidade de falha antecipada, isto é, $\tau(\theta) = P(X_1 < K)$, para algum $K$ fixo. Encontre o ENVUMV p/ $\tau(\theta)$.

$\underline{R}$: Temos que $X_1, \dots X_n \sim f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{1}{\theta} x\right\}$

$$\Rightarrow f_{\underset{\sim}{x}}(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum x_i} \quad \text{(Pertence a família exponencial)}$$

Como $\tau(\theta) = P(X_1 \leq K) = 1 - e^{-K\frac{1}{K}}$

Seja $\hat{\theta} = \mathbb{1}_{(X_1 \leq K)}$ o estimador não viciado de $\tau(\theta)$.

Pois $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(X_1 \leq K)}) = P(X_1 \leq K) = 1 - e^{K/\theta}$.

Então, f pertence à família exponencial, $S = \sum X_i$ estat. suf. e completa. Seja $\hat{\theta}^* = \mathbb{E}(\hat{\theta} | S)$ é um ENVUMV p/ $\tau(\theta)$, com $\hat{\theta}^* = \int_0^K f_{X_1|S}(x_1|s)\, dx_1$

7) Sejam $X_1 \dots X_n$ e $Y_1, \dots Y_m$ duas amostras aleatórias independentes das densidades $N(\mu_X, \sigma^2)$ e $N(\mu_Y, \sigma^2)$.

Encontre o ENVUMV p/ $\mu_Y - \mu_X$.

R: $f_{X,Y}(x,y) = f_{\underset{\sim}{X}}(x) \cdot f_Y(y) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum(x_i - \mu_x)^2} \cdot (2\pi\sigma^2)^{-m/2} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum(y_i - \mu_y)^2}$

$\ell(\mu_x, \mu_y | \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = \frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i - \mu_x)^2 - \frac{m}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(y_i - \mu_y)^2$

$\frac{\partial \ell}{\partial \mu_X} = \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i - \mu_X) = 0 \Rightarrow \hat{\mu}_X = \bar{X}$ é o EMV p/ $\mu_X$

Da mesma forma $\hat{\mu}_Y = \bar{Y}$.

Logo, $\hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}$ é o estimador nT viesado p/ $\mu_X - \mu_Y$, como f pertence à família exponencial e $S = \sum X_i - \sum Y_i$ é uma estat. suf. e completa p/ $\mu_X - \mu_Y$, então,

Pelo Teo. de Scheffé $\hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}$ é um ENVUMV.

8) Sejam $X_1, \ldots X_n$ uma amostra aleatória de $X$:

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \; , \; \theta > 0 .$$

e considere $\tau(\theta) = P(X \geq x)$ para algum $x$ fixo.

Encontre o ENVUMV de $\tau(\theta)$.

R: Temos $\tau(\theta) = P(X \geq x) = e^{-1/\theta \, x}$

$$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x},\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum x_i} = e^{\left(-\frac{1}{\theta}\sum x_i - n\log\theta\right)}$$

Assim, $\underset{\sim}{X}$ pertence à família exponencial e $S = \sum x_i$ é uma estat. suf. e completa. Logo, um estimador não viesado para $\tau(\theta)$ é

$$\hat{\theta} = \mathbb{1}(X \geq x) \longrightarrow E(\hat{\theta}) = P(X \geq x).$$

Seja $\hat{\theta}^* = E(\hat{\theta} \mid S)$, pelo Teo. de Scheffé $\hat{\theta}^*$ é o ENVUMV de $\tau(\theta)$.

De forma explícita temos:

$$\hat{\theta}^* = E(\hat{\theta} \mid S) = P(X_1 > x \mid S) = \int_x^{\infty} f_{X_1|S}(x_1|s)\, dx_1 .$$

É possível calcular $\hat{\theta}^*$ de forma explícita pois:

$f_X(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x+\Delta)}{\Delta}$, então $f_{X_1|S}(x_1|s)\,\Delta x_1 = \frac{f(x_1, s) \cdot \Delta x_1}{f(s)}$.