EMV

1) Seja $X_1, \dots X_n \sim Bin(1, \theta)$, com valores observados $x_1, \dots x_n$

Determine o EMV de θ.

R:
$$L(\theta \mid \underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \theta^{\tau}(1-\theta)^{n-\tau}, \text{ com } \tau = \Sigma x_i$$

$$\log(L(\theta \mid \underline{x})) = \tau \log\theta + (n-\tau)\log(1-\theta)$$

$$\frac{\partial \log(L(\theta \mid \underline{x}))}{\partial \theta} = \frac{\tau}{\theta} - \frac{(n-\tau)}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\tau}{n} = \bar{X}$$

$\dfrac{\partial^2 \log(L(\theta \mid x))}{\partial \theta^2}$ fica a cargo do leitor. (Deve ser < 0 $\forall \theta$)

2) Determine o EMV de $\theta \in (0, \infty)$ na distr. Poisson(θ) em termos da amostra aleatória com valores observados $x_1, \dots x_n$.

$$f(x_i;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!}, \quad x_i = 0, 1, \dots, \quad i = 1, \dots, n.$$

Então,

$$\log(L(\theta \mid x)) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^{x_i}}{x_i!}\right) = \log\left(e^{-n\theta} \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!}\right)$$

$$= -n\theta + \log(\theta)\Sigma x_i - \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

$$= -n\theta + (n\log\theta)\bar{x} - \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

$$\frac{\partial \log(L(\theta|x))}{\partial \theta} = -n + \frac{n\bar{x}}{\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{x}.$$

Verifique se é máximo pela derivada segunda.

) Determine o EMV de $\theta \in (0,\infty)$ da Exponencial com base na a.a $X_1, \dots X_n$ com valores observados $x_1, \dots x_n$

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \ x > 0$$

R: $$\log(L(\theta|x)) = \log\left(\theta^n e^{-\theta n \bar{x}}\right) = n\log(\theta) - n\bar{x}\theta$$

$$\frac{\partial \log(L(\theta|x))}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - n\bar{x} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}}$$

5) Seja $X_1, \dots X_n$ a.a de uma $N(\mu, \sigma^2)$ em que um dos parâmetros é conhecido. Determine o EMV do outro (desconhecido). Em seguida, determine o EMV quando μ e σ^2 são desconhec

i) Seja μ desconhecido

$$\log(L(\mu|x)) = \log\left\{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2\right\}\right.$$

$$= -n\log(\sqrt{2\pi\sigma}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \log(L(\mu|x))}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum 2.(x_i-\mu).(-1) = 0$$

$$\therefore \mu = \bar{x}.$$

ii) Seja σ^2 desconhecido

$$\log(L(\sigma^2|x)) = \log\left\{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2\right\}\right\}$$

$$= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \log(L(\sigma^2|x))}{\partial\sigma^2} = \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$\therefore \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2 .$$

iii) Ambos desconhecidos

$$\log(L(\mu,\sigma^2|x)) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

Assim, as duas equações de verossimilhança produz solução $\hat{\mu} = \bar{x}$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$.

ö) Seja $X_1, \dots X_n$ a.a da $U(\alpha,\beta)$, $\alpha<\beta$, em que somente um dos parâmetros é desconhecido. Determine o EMV este parâmetro. Em seguida faça p/ ambos desconhecidos.

i) Seja α desconhecido

$$f(x_i;\alpha) = \frac{1}{\beta-\alpha} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}(x_i), \quad i=1,\dots n$$

$$L(\alpha \mid x) = \frac{1}{(\beta-\alpha)^n} \prod^{n} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}(x_i) = \frac{1}{(\beta-\alpha)^n} \mathbb{1}_{[\alpha,\infty)}(x_{(1)}) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_{(n)})$$

Maximizar ~~Minimizar~~ $L(\alpha \mid x)$ com relação à α significa duas coisas: ~~minimizar~~ maximizar $\mathbb{1}_{[\alpha,\infty)}(x_{(1)})$ e maximizar ~~minimizar~~ $\frac{1}{(\beta-\alpha)^n}$.

O máximo de $\mathbb{1}_{[\alpha,\infty)}(x_{(1)})$ é 1, e ocorre quando $\alpha \leq x_{(1)}$

O máximo de $\frac{1}{(\beta-\alpha)^n}$ é atingido quanto mais próximo α está de β. Mas $\alpha \leq x_{(1)} \leq \beta$, ié, α está restrito pelo $x_{(1)}$. Então $\hat{\alpha} = x_{(1)}$

ii) seja β desconhecido

$$L(\beta \mid x) = \frac{1}{(\beta-\alpha)^n} \mathbb{1}_{[\alpha,\infty)}(x_{(1)}) \mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_{(n)})$$

Da mesma forma do item (i), agora quero que β esteja próximo de α, mas $\alpha \leq x_{(n)} \leq \beta$.

Então $\hat{\beta} = x_{(n)}$.

iii) Ambos desconhecidos

$$L(\alpha, \beta \mid x) = \frac{1}{(\beta-\alpha)^n} \mathbb{1}_{[\alpha,\infty)}(x_{(1)}) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}(x_{(n)})$$

Sabemos que $\alpha \leq x_{(1)} \leq x_{(n)} \leq \beta$

As indicadoras são maximizadas se $\begin{cases} \mathbb{1}_{[\alpha,\infty)}(x_{(1)}) = 1 \\ \mathbb{1}_{(-\infty,\beta]}\, x_{(n)} = 1 \end{cases}$

Já $\dfrac{1}{(\beta-\alpha)^n}$ é maximizado quanto mais próximos

β e α estiverem. Como $\alpha \leq x_{(1)} \leq x_{(n)} \leq \beta$, Temos

$\hat{\alpha} = x_{(1)}$ e $\hat{\beta} = x_{(n)}$

7) Seja $X_1, \dots X_n \sim Bin(1,\theta)$ com valores obs. $x_1, \dots x_n$.
Determine o EMV de $\theta(1-\theta)$.

R: Seja $g(\theta) = \theta(1-\theta)$. Como $g: (0,1) \longrightarrow (0, 1/4)$ e

pelo exercício 1 Temos $\hat{\theta} = \bar{x}$ (EMV de θ). O EMV é $g(\theta)$ é

$\hat{g}(\theta) = \bar{x}(1-\bar{x})$. Ainda que g nт seja 1 a 1.

8) Seja $X_1, \dots X_n$ a.a $Exp(\theta)$. Sabendo que $\hat{\theta}_{MV}$ p/ θ é $\dfrac{1}{\bar{X}}$,
encontre o EMV p/ $g(\theta) = P(X>1)$.

R:

$$g(\theta) = P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-\theta}) = e^{-\theta}$$

Pelo princípio da invariância o EMV de $g(\theta)$ é

$\hat{g}(\theta) = e^{-1/\bar{x}}$.