Testes mais poderosos

1) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a da densidade da Gama$\left(p, \frac{1}{\theta}\right)$ com p conhecido, i.é:

$$f(x) = \frac{\theta^{-p}}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x/\theta}$$

a) Seja $p = 1$. Encontre o Teste mais poderoso de Tamanho α para Testar

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta = \theta_1 \, , \text{ com } \theta_1 > \theta_0$$

b) Encontre um Teste UMP para Testar

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

R.

a) Temos $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$, pois $\underline{p = 1}$.

Menos

$$\lambda = \frac{f(\underset{\sim}{x} \mid \theta_0)}{f(x \mid \theta_1)} = \frac{(1/\theta_0)^n \cdot e^{-\frac{\sum x_i}{\theta_0}}}{(1/\theta_1)^n e^{-\sum x_i/\theta_1}} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n e^{-\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\sum x_i}$$

Fazendo $\lambda < K$, Temos

$$\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n e^{-\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\sum x_i} < K$$

$$e^{-\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}\right)\sum x_i} < K \cdot \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{-n}$$

$$\underbrace{-\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}\right)}\sum x_i < \log\left[K\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{-n}\right]$$

$\hookrightarrow$ como $\theta_1 > \theta_0 \Rightarrow \frac{1}{\theta_0} > \frac{1}{\theta_1}$

$$\sum x_i > -\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}\right)^{-1} \log\left[K\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{-n}\right]$$

$$\sum x_i > k'.$$

Então a Região Crítica é da forma:

$$RC = \{ \underline{x} : \sum x_i > k' \}$$

É um Teste UMP de nível α para Testar

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

O valor de k' da forma

$$P_{\theta_0}\left(\sum x_i > k'\right) = \alpha, \text{ com } \sum X_i \sim \text{Gama}\left(n, \frac{1}{\theta_0}\right)$$

Ou pode utilizar o fato de $2\theta_0 \sum X_i \sim \chi^2_{2n}$

b) Temos que:

$$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \underbrace{\frac{1}{\Gamma(p)^n} \prod^{n} x_i^{p-1}}_{h(\underset{\sim}{x})} \, e^{\overbrace{-\frac{1}{\theta}}^{c(\theta)} \overbrace{\sum x_i}^{T(\underset{\sim}{x})} \underbrace{- np\log\theta}_{d(\theta)}}$$

Logo temos que f pertence à família exponencial. Como $c(\theta) = \frac{-1}{\theta}$ é não decrescente em $T(\underset{\sim}{x}) = \sum x_i$, então $\underset{\sim}{X}$ tem distribuição com RVM não decrescente, assim temos que o teste

$$\varphi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } T(\underset{\sim}{x}) = \sum x_i > k \\ 0 & \text{se } \sum x_i < k \end{cases}$$

Tem função poder não decrescente em θ e é um teste UMP de nível α.

2) Seja X única observação da densidade

$$f(x;\theta) = \frac{e^{(x-\theta)}}{\left[1+e^{(x-\theta)}\right]^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Encontre o teste mais poderoso de tamanho α para testar

$$H_0: \theta = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta = 1$$

b) O Teste encontrado em (a) é UMP de Tamanho α para Testar

$$H_0 : \theta \leq 0 \quad vs \quad H_1 : \theta > 0$$

zero

R.

a) Como é apenas uma observação Temos

$$\lambda = \frac{f(x;\theta_0)}{f(x;\theta_1} < K$$

Vamos mostrar que $g(x) = \dfrac{f(x;\theta_0)}{f(x;\theta_1)}$ é monótona

Devemos verificar

$$x < x' \iff g(x) < g(x') \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$(\Rightarrow)$ $x < x' \Rightarrow -x > -x' \Rightarrow e^{-x} > e^{-x'}$

e como $\theta_1 > \theta_0 \Rightarrow e^{\theta_1} > e^{\theta_0} \Rightarrow \begin{cases} e^{\theta_1} - e^{\theta_0} > 0 \text{ ou} \\ e^{\theta_0} - e^{\theta_1} < 0 \end{cases}$

Portanto

$$e^{-x}(e^{\theta_0} - e^{\theta_1}) < e^{-x'}(e^{\theta_0} - e^{\theta_1})$$

($\Leftarrow$) Agora note,

$$g(x) = e^{\theta_0 - \theta_1}\left[\frac{1+e^{-x+\theta_1}}{1+e^{-x-\theta_0}}\right]^2$$

se $g(x) < g(x')$,

Então,

$$\cancel{e^{\theta_0-\theta_1}}\left[\frac{1+e^{-(x-\theta_1)}}{1+e^{-(x-\theta_0}}\right]^2 < \cancel{e^{\theta_0-\theta_1}}\left[\frac{1+e^{-(x'-\theta_1)}}{1+e^{-(x'-\theta_0)}}\right]^2$$

$$\left[1+e^{-(x-\theta_1)}\right]\left[1+e^{-(x'-\theta_0)}\right] < \left[1+e^{-(x'-\theta_1)}\right]\left[1+e^{-(x-\theta_0)}\right]$$

$$\cancel{1}+e^{-(x-\theta_1)}+e^{-(x'-\theta_0)}+\cancel{e^{-x-x'+\theta_0+\theta_1}} < \cancel{1}+e^{-(x'-\theta_1)}+e^{-(x-\theta_0)}+\cancel{e^{-x-x'+\theta_0+\theta_1}}$$

$$e^{-(x-\theta_1)}+e^{-(x'-\theta_0)} < e^{-(x'-\theta_1)}+e^{-(x-\theta_0)}$$

$$e^{-x+\theta_1}-e^{-x+\theta_0} < e^{-x'+\theta_1}-e^{-x'+\theta_0}$$

$$e^{-x}\left(e^{\theta_1}-e^{\theta_0}\right) < e^{-x'}\left(e^{\theta_1}-e^{\theta_0}\right)$$

Então X Tem RVM

Logo o Teste fica $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } X > c \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$

Sabendo que sob H_0

$$F = e^{-X} \sim F_{(2,2)} \text{ , pois } F = e^{-(X-\theta)} \sim F_{(2,2)}$$

Então temos:

$$X < k \Rightarrow -X > -k \Rightarrow e^{-X} > e^{-k} = k'$$

$$P_{\theta_0}(e^{-X} > k') = \alpha \text{ , em que } e^{-X} \sim F_{(2,2)}$$

3) Sejam $Y_1, \dots Y_n$ variáveis aleatórias independentes tais que $Y_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2)$, em que $\beta \in \mathbb{R}$ e os x_i's são números conhecidos.

Suponha σ^2 conhecido, encontre o teste mais poderoso de tamanho α para testar

$$H_0: \beta = 0 \quad vs \quad H_1: \beta = \beta_0 \text{ , } \beta_0 > 0$$

$$\lambda = \frac{f(\underset{\sim}{y}; 0)}{f(\underset{\sim}{y}; \beta_0)} = \frac{\cancel{(2\pi\sigma^2)^{-n/2}}}{\cancel{(2\pi\sigma)^{-n/2}}} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(Y_i - 0)^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(Y_i - \beta_0 x_i)^2\right\}}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\cancel{\sum Y_i^2} - \cancel{\sum Y_i^2} + 2\beta_0 \sum x_i Y_i - \beta_0^2 \sum x_i^2\right]\right\} < K$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2\sigma^2}\left[2\beta_0 \sum x_i Y_i - \beta_0^2 \sum x_i^2\right] < \log K$$

$$2\beta_0 \sum x_i Y_i > -2\sigma^2 \log K + \beta_0^2 \sum x_i^2$$

$$\sum x_i Y > K'$$

Note que $\sum x_i Y_i \sim N(\mu^*, \sigma^{2*})$ (soma de Normais independentes)

com $\mu^* = E(\sum x_i Y_i) = \sum x_i E(Y_i) = \beta \sum x_i^2$

$\sigma^{2*} = \sum x_i Var(Y_i) = \sigma^2 \sum x_i^2$

Logo:

$$P_{\theta_0}\left(\sum x_i Y_i > K'\right) = \alpha$$

$$P_{\theta_0}\left(\frac{\sum x_i Y_i - \mu^*}{\sqrt{\sigma^{2*}}} > K''\right) = P_{\theta_0}(Z > K'') = \alpha$$

em que $Z \sim N(0,1)$ e $K'' = \dfrac{K' - \overset{\text{sob } H_0}{0}}{\sigma\sqrt{\sum x_i^2}}$

4) Sejam $X_1, \dots X_{16}$ a.a $N(\mu, 16)$. Encontre o Teste MP para Testar:

$$H_0: \mu = 10 \quad vs \quad H_1: \mu = 15$$

Com nível de significancia $\alpha = 0{,}05$.

R.

$$\lambda = \frac{L_0}{L_1} = \frac{(32\pi)^{-16/2} \exp\left\{-(1/32)\sum_{i=1}^{16}(x_i - 10)^2\right\}}{(32\pi)^{-16/2} \exp\left\{-(1/32)\sum^{16}(x_i - 15)^2\right\}} \leq K$$

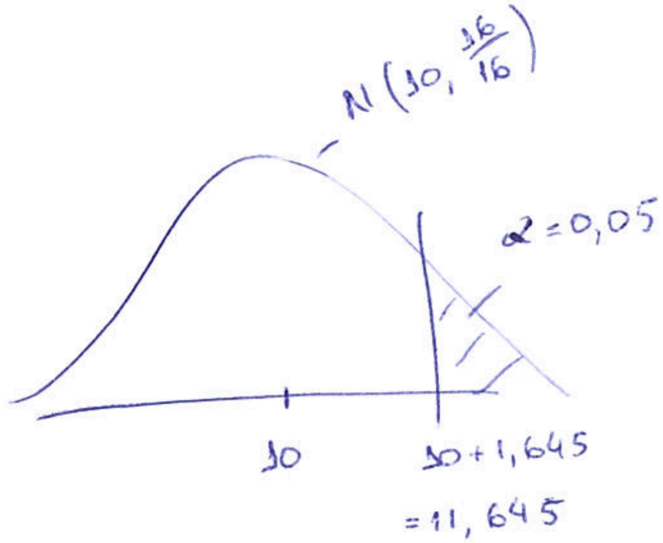
$$\lambda = \exp\left\{ -\frac{1}{32}\left(\sum_{i=1}^{16}(x_i-10)^2 - \sum_{i=1}^{16}(x_i-15)^2 \right) \right\}$$

$$= \exp\left\{ -\frac{1}{32}\left(\cancel{\sum x_i^2} - 20\sum x_i + 1600 - \cancel{\sum x_i^2} + 30\sum x_i - 3600 \right) \right\} \leq$$

$$\Rightarrow \quad -10\sum x_i + 2000 \leq 32\ln(k)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{16}\sum x_i \geq \frac{-1}{160}(32\ln(k) - 200)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} \geq k'$$



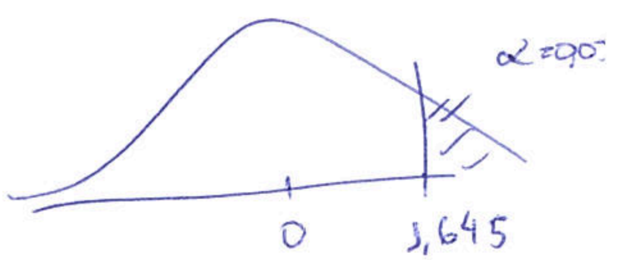
Então Temos:

$$P_{\mu=10}(\bar{X} \geq k') = 0{,}05 \ ,$$

Ou podemos fazer

$$P\left(\frac{\bar{X}-10}{1} \geq \frac{k'-10}{1} \right) = 0{,}05$$

$$P(Z \geq k'-10) = 0{,}05 \ , \ Z \sim N(0,1)$$



$$\Rightarrow k' - 10 = 1{,}645$$

$$\therefore k' = 11{,}645$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{x} > 11{,}6 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

Rejeito H_0 se $\bar{x} \geq 11{,}645$.

5) Considere um sistema de comunicação binário em que a cada tempo um dos dois símbolos, $S=0$ ou $S=1$ é transmitido. Nessas duas hipóteses

$H_0: S=0$ foi transmitido

$H_1: S=1$ foi transmitido

O canal de comunicação tem um ruído, $r \sim N(0,1)$ e recebe o sinal $x = S + r$ (ou seja, o verdadeiro sinal mais um ruído). Em determinado instante observou-se $x = 0.6$.

a) Usando o teste de N-P determine o teste mais poderoso de nível $\alpha = 0.25$.

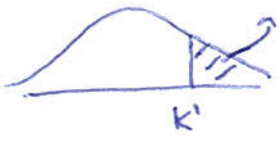
b) Qual sua decisão sobre $x = 0,6$?

R.

a)
$$\lambda = \frac{L_0}{L_1} = \frac{f_0(x)}{f_1(x)} = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{(2\pi)^{-1/2}} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_i - 0)^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_i - 1)^2\right\}} \leq K$$

$\dots \Rightarrow x \geq K'$ (veja o desenvolvimento no ex 4)

$P_{H_0}(X \geq k') = 0.25$, $X \sim N(0,1)$



$$\Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0.674 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

b) Como $x = 0,6 < 0.674 \Rightarrow S = 0$ foi Transmitido.

6) Sejam $X_1, \dots X_n$ uma a.a. de X em que

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x) \quad , \theta > 0 .$$

Obtenha um Teste exato para Testar

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta > 1$$

ao nível de significância de α.

R:

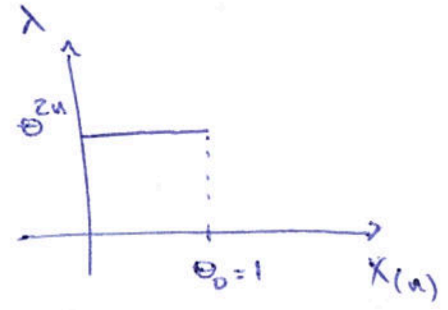
$$\lambda = \frac{f_0(\underset{\sim}{x};\theta)}{f_1(\underset{\sim}{x};\theta)} = \frac{2^n \left(\prod x_i / \theta_0^{2n}\right)}{2^n \left(\prod x_i / \theta_1^{2n}\right)} \cdot \frac{\mathbb{1}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_0)}{\mathbb{1}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_1)} = \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{2n} \frac{\mathbb{1}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_0)}{\mathbb{1}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_1)}$$

Se $X_{(n)} < \theta_0 \Rightarrow \mathbb{1}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_0) = 1$ e $\lambda = \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{2n}$

Se $\theta_0 < X_{(n)} < \theta \Rightarrow \mathbb{1}_{(x_{(n)},\infty)}(\theta_0) = 0$ e $\lambda = 0$.

Ou seja:

$$\lambda = \begin{cases} \left(\frac{\theta}{1}\right)^{2n} & \text{se } X_{(n)} < \theta_0 = 1 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$



Então Temos RVM não decrescente e o Teste UMP

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{(n)} > K \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

com $P_{H_0}(X_{(n)} > K) = \alpha$ (1)

$$F_{X_{(n)}}(x) = \left(F_X(x)\right)^n \Rightarrow F_{X_{(n)}}(x) = \frac{x^{2n}}{\theta^{2n}}$$

De (1) Temos

$$\frac{K^{2n}}{\theta_0^{2n}} = 1 - \alpha \Rightarrow K = \left[\theta_0^{2n}(1-\alpha)\right]^{1/2n} = (1-\alpha)^{1/2n}$$

Logo

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{(n)} > (1-\alpha)^{1/2n} \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

7) Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma a.a de X em que

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0$$

Obtenha o Teste UMP para Testar

$$H_0: \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta > \theta_0, \quad \theta_0 > 0$$

com n.s igual a α.

R. $$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{(1-\theta)/\theta} = e^{-n\log\theta + \frac{1}{\theta}\sum \log x_i - \sum \log x_i}$$

$$= \underbrace{e^{-\sum \log x_i}}_{h(\underset{\sim}{x})} \cdot e^{\overbrace{\tfrac{1}{\theta}}^{c(\theta)} \overbrace{\sum \log x_i}^{T(\underset{\sim}{x})} - \underbrace{n\log\theta}_{d(\theta)}}$$

f pertence à família exponencial, como

$c(\theta) = \frac{1}{\theta}$ é ns crescente em $T(\underset{\sim}{x}) = \sum \log x_i$,

então $\underset{\sim}{X}$ Tem RVM ns crescente em $T(x)$, Logo

o Teste
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum \log x_i < c \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

É um Teste UMP com $\alpha = P_{\theta_0}(\sum \log x_i < c)$

8) Sejam $X_1, \dots X_n$ uma a.a de X em que

$$f(x) = \theta (1+x)^{-(1+\theta)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \quad , \theta > 0$$

Obtenha o Teste UMP para Testar

$$H_0: \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta > \theta_0 \quad , \theta_0 > 0$$

de nível α.

R. $$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \theta^n \prod^n (1+x_i)^{-(1+\theta)} = e^{\overbrace{n \log\theta}^{d(\theta)} \overbrace{-(1+\theta)}^{c(\theta)} \overbrace{\sum \log(1+x_i)}^{T(\underset{\sim}{x})}}$$

Assim, Temos que $\underset{\sim}{X}$ pertence à família exponencial, como $c(\theta) = -(1+\theta)$ é uma f ç não crescente em $T(\underset{\sim}{x})$, então o Teste UMP é

$$\varphi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & se \ \sum \log(1+x_i) \leq K \\ 0 & c.c \end{cases}$$

Assim, $RC = \{\underset{\sim}{x}; \sum \log(1+x_i) \leq K\} = \{\underset{\sim}{x}; 2\theta_0 \sum \log(1+x_i) \leq 2\theta_0 K\}$

Logo, $\alpha = P_{H_0}(2\theta_0 \sum \log(1+x_i) \leq K') = P(\chi^2_{2n} \leq K')$

Temos $F_{\chi^2_{2n}}(K') = \alpha \Rightarrow K' = F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha)$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & se \ 2\theta_0 \sum \log(1-x_i) \leq F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha) \\ 0 & c.c \end{cases}$$

9) Sejam $X_1, \dots X_n$ uma a.a de $X \sim Bern(\theta)$. Suponha que queremos testar:

$$H_0: \theta \leq 0,1 \quad vs \quad H_1: \theta > 0.1$$

ao nível $\alpha = 0,05$ e com base em uma amostra de tamanho $n = 15$.

R. $$P(\underline{x}) = \theta^{\Sigma x_i} (1-\theta)^{n - \Sigma x_i} = \exp\{T(x)\log\theta + (n - \Sigma x_i)\log(1-\theta)\}$$

$$= \exp\{\Sigma x_i \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) + n\log(1-\theta)\}.$$

Logo pertence à família exponencial e $c(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$ é função estritamente crescente em θ. Assim, o teste UMP é

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Sigma x_i > c \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

com $\alpha = P_{H_0}(\Sigma x_i > c)$, $\Sigma x_i \sim Bin(n, \theta)$

$$P_{H_0}(\Sigma x_i > 3) = 0,056$$

$$P_{H_0}(\Sigma x_i > 4) = 0,013$$

$$P_{H_0}(\Sigma x_i > 5) = 0,02$$

A regra de decisão é rejeitar H_0 se $\Sigma x_i > 4$.

10) Suponha o Tempo de falha de um equipamento Tenha dist. Weibull deslocada com densidade:

$$f(x/\alpha,\varphi,a) = \cancel{\frac{\alpha}{\varphi}} \frac{\alpha}{\varphi}(x-a)^{\alpha-1} e^{-(x-a)^{\alpha}/\varphi} \quad \text{si } (x) \; (a,\infty)$$

em que α, φ e a são não-negativos. Suponha que a e α sejam conhecidos e considere $X_1, \dots X_n$ uma a.a de X, com Tamanho n.

Encontre um Teste UMP de nivel α_0 para

$$H_0: \varphi = \varphi_0 \quad vs \quad H_1: \varphi > \varphi_0$$

R.

Temos

$$f(\underset{\sim}{x}|\alpha,\varphi,a) = \left(\frac{\alpha}{\varphi}\right)^n \left(\prod^n (x_i-a)\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\varphi}\sum(x_i-a)^{\alpha}}$$

$$= \alpha^n \left(\prod (x_i-a)\right)^{\alpha-1} e^{\overbrace{-\frac{1}{\varphi}}^{C(\theta)} \underbrace{\sum(x_i-a)^{\alpha}}_{T(\underset{\sim}{x})} - \underbrace{n\log\varphi}_{d(\varphi)}}$$

Como $\underset{\sim}{X}$ pertence à familia exponencial, com $c(\theta) = \frac{-1}{\varphi}$, $\varphi > 0$ é não decrescente. Então, um Teste UMP é dado por

$$\varphi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum(x_i-a)^{\alpha} > C \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

com $\alpha = P_{H_0}\left(\sum(x_i-a)^{\alpha} > C\right)$

Seja $T = (x-a)^{\alpha} \Rightarrow F_T(\tau) = P((x-a)^{\alpha} < \tau) = P(x < \tau^{1/\alpha} + a)$

$$= F_X(\tau^{1/\alpha} + a)$$

Então,

$$f_T(\tau) = \frac{\partial F_X(\tau^{1/\alpha} + a)}{\partial \tau} = f_X(\tau^{1/\alpha} + a) \cdot \frac{1}{\alpha} \tau^{1/\alpha - 1}$$

$$= \frac{\alpha}{\varphi} (\tau^{1/\alpha})^{\alpha - 1} e^{-(\tau^{1/\alpha})^{\alpha}/\varphi} \cdot \frac{1}{\alpha} \tau^{1/\alpha - 1}$$

$$= \frac{1}{\varphi} e^{-(1/\varphi)\tau} .$$

Ou seja $T = (x-a)^{\alpha} \sim \exp\left(\frac{1}{\varphi}\right) \Rightarrow \Sigma (x_i - a)^{\alpha} \sim \text{Gama}\left(n, \frac{1}{\varphi}\right.$