Universidade Federal do Paraná
Departamento de Estatística

CE085 - ESTATÍSTICA INFERENCIAL

Docente Eduardo Vargas Ferreira
Discente Jhenifer Caetano Veloso

14 de dezembro de 2015

Lista de Exercícios

1. Considere que o tempo de resistência ao fogo de determinada vestimenta após tratamento com uma tintura especial, conforme na tabela abaixo, segue uma distribuição normal. Obtenha o intervalo de confiança (95%) para média deste tempo de resistência.

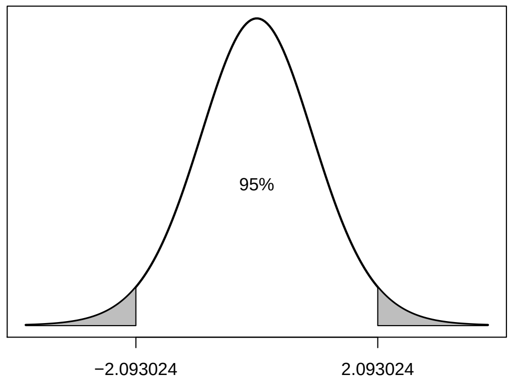
Tempo de Resistência ao Fogo (segundos)									
9,85	9,87	9,83	9,95	9,93	9,67	9,92	9,95	9,75	9,94
9,74	9,93	9,77	9,85	9,99	9,92	9,67	9,75	9,88	9,89

$\overline{x} = 9.8525$
$s = 0.09645697$

$$IC(\mu, 95\%) = \left(\overline{x} - \frac{ts}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{ts}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(9.852 - \frac{2.09 * 0.096}{\sqrt{20}}, 9.852 + \frac{2.09 * 0.096}{\sqrt{20}}\right)$$

$$IC(\mu, 95\%) = (9.807357, 9.897643)$$



2. Seja X uma única observação da densidade $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0$. A quantidade pivotal para θ é dada por $Q(\theta; X) = -\theta log X$ e segue distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 1$.

a) Encontre o intervalo de confiança para θ.

$$P\left(a \leq -\theta \ logX \leq b\right) = 1 - \alpha$$
$$P\left(\frac{a}{logX} \leq -\theta \leq \frac{b}{logX}\right) = 1 - \alpha$$
$$P\left(-\frac{b}{logX} \leq \theta \leq -\frac{a}{logX}\right) = 1 - \alpha$$
$$IC(\theta, 1-\alpha) = \left(-\frac{b}{logX}, -\frac{a}{logX}\right) = 1 - \alpha$$

b) Seja $Y = (-logX)^{-1}$. Encontre o coeficiente de confiança associado ao intervalo $\left(\frac{Y}{2}, Y\right)$.

$$\frac{-\ b}{logX} = Y$$
$$\frac{-\ b}{logX} = \frac{-\ 1}{logX}$$
$$-\ b = \frac{-\ logX}{logX}$$
$$b = 1$$

$$\frac{-\ a}{logX} = \frac{Y}{2}$$
$$\frac{-\ a}{logX} = \frac{-1}{2\ logX}$$
$$-\ a = \frac{-\ logX}{2\ logX}$$
$$a = \frac{1}{2}$$

Substituindo a e b em $P\left(a \leq -\theta\ logX \leq b\right) = 1 - \alpha$ temos:

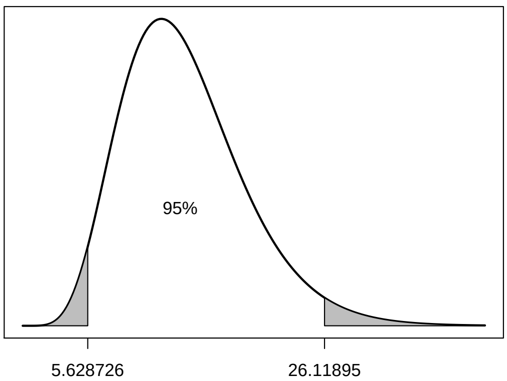
$$P\left(\frac{1}{2} \leq -\theta\ logX \leq 1\right) = 1 - \alpha$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-y}dy = -e^{-1} - \left(-e^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{-e} + \frac{1}{\sqrt{e}}$$
$$= 0.2386512$$

O coeficiente de confiança é 0.2386512

3. Sendo X uma população tal que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ em que μ e σ^2 são desconhecidos. Uma amostra de tamanho 15 forneceu os valores $\sum x_i = 8,7$ e $\sum x_i^2 = 27,3$. Determine um intervalo de confiança de 95% para σ^2.

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\overline{x}^2}{n-1}$$
$$s^2 = \frac{27.3 - 15 * 0.3364}{15-1}$$
$$s^2 = 1.589571$$



$$IC(\sigma^2, 95\%) = \left(\frac{(n-1)s^2}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)s^2}{q_{\frac{\alpha}{2}}}\right)$$
$$= \left(\frac{(14)1.589571}{26.11895}, \frac{(14)1.589571}{5.628726}\right)$$
$$IC(\sigma^2, 95\%) = (0.8520247, 3.953646)$$

4. Os dados abaixo são uma amostra aleatória da distribuição Bernoulli(p).

0 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1

Obtenha um intervalo de confiança de 95% para p baseado na normalidade assintótica de $\hat{p}$.

Sabemos que o estimador de máxima verossimilhança é $\hat{p} = \frac{\sum x_i}{n}$ e que a informação de Fisher é $I(\hat{p}) = \frac{n}{\hat{p}(1-\hat{p})}$. Com isso, a quantidade pivotal é dada por:

$$Q = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \sim N(0,1)$$

Intervalo de confiança para p:

$$P\left(-z \leq Q \leq z\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-z \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leq z\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq \hat{p} - p \leq z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Construindo o intervalo de confiança com os dados do problema:

$$P\left(0.72 - 1.96\sqrt{\frac{0.72(1-0.72)}{25}} \leq p \leq 0.72 + 1.96\sqrt{\frac{0.72(1-0.72)}{25}}\right) = 95\%$$

$$IC(p, 95\%) = (0.5439957, 0.8960043)$$