Exercícios de Inferência Estatística

João Matheus S.K.T. Hamada

• Intervalo de confiança para a média populacional

1) Deseja-se estimar a resistência média de um certo tipo de fibra usada na fabricação de um tecido. Uma particular amostra aleatória de 40 espécimes de fibra tem uma média aritmética de 12,4 bar. Se o desvio padrão σ da população é conhecido e igual a 2,1 bar, determine um intervalo de confiança de 95% para o verdadeiro valor da média populacional.

Solução: $n = 40$, $\bar{x} = 12,4$ bar, $\sigma = 2,1$ bar, $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le Z \le \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{d}\right) = 1 - \alpha$$

$$P(\underbrace{\bar{X} - d}_{L_{inf}} \le \mu \le \underbrace{\bar{X} + d}_{L_{sup}}) = 1 - \alpha$$

• $d = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 2,1}{\sqrt{40}} = 0,65$ $\therefore L_{inf} = \bar{x} - d = 12,4 - 0,65 = 11,75$

$L_{sup} = \bar{x} + d = 12,4 + 0,65 = 13,05$

• Portanto, com base na amostra selecionada, o intervalo de confiança de 95% para a verdadeira resistência média da fibra, em bar, é (11,75; 13,05)

• Intervalo de confiança para a proporção populacional

2) Um fabricante de pentes de memória RAM para computadores, que produz em grandes quantidades, deseja estimar a fração p de unidades defeituosas elaboradas por sua indústria. Para isso ele selecionou uma amostra aleatória de 200 unidades e verificou que, entre elas, 5 eram defeituosas. Construa um intervalo de confiança de 95% para p.

Solução: $\underset{(v.a.)}{X_i} = \begin{cases} 1, \text{ se a } i\text{-ésima unidade selecionada é defeituosa} \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases}$

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, $i = 1, \ldots, 200$

• $\sum_{i=1}^{200} x_i = 5$ $\quad \hat{p} = \frac{5}{200} = 0,025$

• $d = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{(0,025)\cdot(0,975)}{200}} = 0,022$

$\begin{cases} \cdot L_{inf} = \hat{p} - d = 0,025 - 0,022 = 0,003 \\ \cdot L_{sup} = \hat{p} + d = 0,025 + 0,022 = 0,047 \end{cases}$

• Portanto, com base na amostra selecionada, espera-se com 95% de confiança que o intervalo (0,3%; 4,7%) inclua a verdadeira proporção de pentes defeituosos.

• Intervalo de confiança para a variância de uma população normal ②

3) O peso de um componente mecânico é uma variável aleatória com distribuição normal com média μ e variância σ^2, desconhecidos. Pretende-se estudar a variabilidade do processo de produção e, para isso, uma amostra com $n = 11$ componentes foi avaliada. Os pesos (g) são dados

98 97 102 100 98 101 102 105 95 102 100

• Construa um intervalo de confiança de 95% para a variância populacional.

Solução: $\sum x = 1100$ $\sum x^2 = 110.080$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1100}{11} = 100g \qquad S^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n-1} = \frac{110080 - \frac{(1100)^2}{11}}{10} = 8g^2$$

$$\cdot P(a \leq \sigma^2 \leq b) = 1 - \alpha$$

$$a = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1); 1-\frac{\alpha}{2}}} \qquad b = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1); \frac{\alpha}{2}}} \qquad \chi^2_{10; 0,975} = 20,48 \qquad \chi^2_{10; 0,025} = 3,25$$

$$a = \frac{10 \cdot 8}{20,48} = 3,906 \qquad b = \frac{10 \cdot 8}{3,25} = 24,615$$

• Um intervalo de confiança com 95% para σ^2, com base na amostra selecionada, é dado por $(3,906; 24,615)$.

• Intervalo de confiança para a diferença de duas proporções de populações independentes

4) Uma fábrica produz diariamente uma grande quantidade de peças de um certo tipo. Em um determinado dia foi selecionada da linha de produção uma amostra aleatória de 50 peças, das quais quatro estavam fora das especificações. Numa nova seleção de 50 peças, feita no dia seguinte, foram encontradas seis peças fora das especificações. Construa um intervalo de confiança de 98% para a verdadeira diferença entre as proporções de peças produzidas fora das especificações nos dois dias. Há razões para se afirmar que as frações de unidades fora das especificações no produto fabricado são diferentes nesses dois dias?

4) Solução: $(X_1, X_2, \ldots, X_{50})$ e $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{50})$ a.a.s do primeiro e do segundo dia, respectivamente: 3

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p_1), \text{ para } i = 1, 2, \ldots, 50$$

$$Y_j \sim \text{Bernoulli}(p_2), \text{ para } j = 1, 2, \ldots, 50$$

$$n = m = 50, \sum_{i=1}^{n} X_i = 4, \sum_{j=1}^{m} Y_j = 6 \quad \therefore, \hat{p}_1 = \frac{4}{50} = 0{,}08 \quad \hat{p}_2 = \frac{6}{50} = 0{,}12$$

$$\begin{cases} P(\overbrace{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - d}^{L\,inf} \leq p_1 - p_2 \leq \overbrace{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 + d}^{L\,sup}) = 1 - \alpha \\ d = \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{z_{0,99}} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}} \end{cases}$$

$$d = 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{(0{,}08)\cdot(0{,}92)}{50} + \frac{(0{,}12)\cdot(0{,}88)}{50}} = 0{,}1394 \approx 0{,}14$$

$$\begin{cases} L\,inf = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - d = 0{,}08 - 0{,}12 - 0{,}14 = -0{,}18 \\ L\,sup = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + d = 0{,}08 - 0{,}12 + 0{,}14 = 0{,}10 \end{cases}$$

. Como o intervalo de confiança $(-0{,}18; 0{,}10)$ inclui o valor zero, com base nessa amostra e com 98% de confiança, o estudo não oferece evidências para que as proporções verdadeiras sejam diferentes nos dois dias considerados.