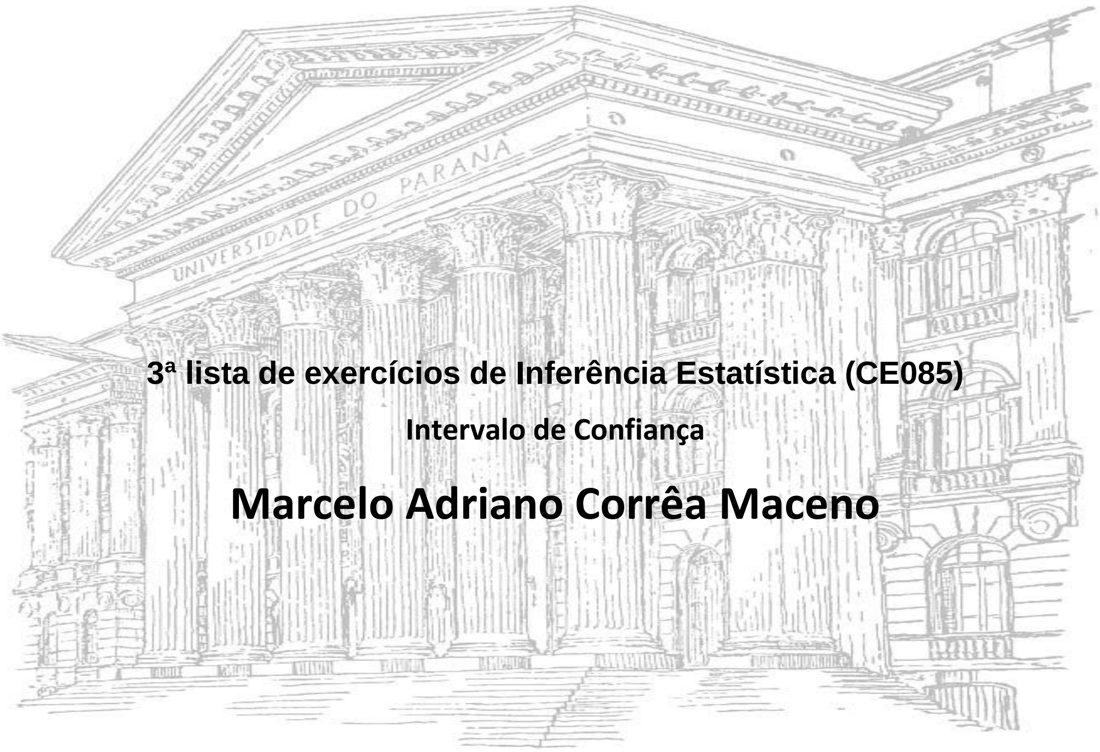
Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Estatística



3ª lista de exercícios de Inferência Estatística (CE085)

Intervalo de Confiança

Marcelo Adriano Corrêa Maceno

Eduardo Vargas Ferreira

Curitiba

Dezembro de 2015

Exercício 1 – Testes de compressão foram aplicados na marca *A* de cimento para avaliar sua resistência em concretos. Foram produzidos 13 *corpos de prova* e os testes foram aplicados no Laboratório de testes do Departamento de Engenharia Civil da UFSCar. (O corpo de prova padrão brasileiro, normatizado pela ABNT, é o cilíndrico, com 15 cm de diâmetro, 30 cm de altura e a idade de referência é 28 dias). Foi registrada a resistência à compressão simples (fc), para cada corpo de prova com o intuito de calcular a resistência característica do concreto à compressão (fck). Um concreto classe C30, por exemplo, corresponde a um concreto com fck = 30 Mpa (MPa = 106Pa).

Dados (MPa):

31.04	31.11	39.56	24.83	36.97	34.86	29.44	$\bar{x}_A = 33.76$
39.15	27.82	34.96	35.19	39.68	34.27		$s_A = 4.665$

A empresa afirma que o processo tem variabilidade σ^2 = 25MPa^2. Construir um intervalo de confiança 95% (nível de significância □ = 0.05) para a resistência à compressão média.

$$\textit{Estatística}: \quad \frac{\bar{X}_A - \mu_A}{\sigma_A / \sqrt{n_A}} \sim N(0;1)$$

Encontrar *a* e *b* tais que: *P(a<μ_A<b)*=0.95.

RESOLUÇÃO

$$P\left(-1.96 \le \frac{\bar{X}_A - \mu_A}{\sigma_A / \sqrt{n_A}} \le 1.96\right) = 0.95$$

$$P\left(-1.96\frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}} \le \bar{X}_A - \mu_A \le 1.96\frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}\right) = 0.95$$

$$P\left(\bar{X}_A - 1.96\frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}} \le \mu_A \le \bar{X}_A + 1.96\frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}\right) = 0.95$$

Substituindo os valores da média amostral e tamanho da amostra:

$$P\left(33.76 - 1.96\frac{5}{\sqrt{13}} \le \mu_A \le 33.76 + 1.96\frac{5}{\sqrt{13}}\right) = 0.95$$

$$P(31.04 \le \mu_A \le 36.48) = 0.95$$

Ou seja:

$$a = 33.76 - 1.96\frac{5}{\sqrt{13}} = 31.04\,\text{MPa}$$

$$b = 33.76 + 1.96\frac{5}{\sqrt{13}} = 36.48\,\text{MPa}$$

Logo, **(31.04; 36.48)** é um *I.C.* 95% para µ**A.**
Interpretação**:** o intervalo **(31.04 ; 36.48)** tem 95 % dos intervalos possíveis de conter o valor real da média μ_A.

Exercício 2 - No caso dos testes de compressão em amostras de concreto o gerente da companhia, desconfiando de que a informação a respeito da variância não seja verdadeira, refez os cálculos estimando a variância do processo por s^2.

RESOLUÇÃO:
Como o procedimento de cálculo é o mesmo, basta substituir o valor do quantil da normal ($Z_{0.025}$ = 1.96) pelo quantil das distribuição *t – Student* com (n – 1) = 12 graus de liberdade. Como n_A= 13 , então $t_{(n-1),0.025}$= 2.1788. Com $\bar{x}_A$= 33.76 e s_A = 4.665.
Refazendo os cálculos temos que:

$$\bar{x}_A - t_{(n_A-1);0.025}\frac{s_A}{\sqrt{n_A}} = 33.76 - 2.1788\frac{4.665}{\sqrt{13}} = 30.94\,\text{MPa}$$

$$\bar{x}_A + t_{(n_A-1);0.025}\frac{s_A}{\sqrt{n_A}} = 33.76 + 2.1788\frac{4.665}{\sqrt{13}} = 36.58\,\text{MPa}$$

Portanto, **(30.94 , 36.58)** é um IC 95% para μ_A para o caso em que a variância é desconhecida.

Exercício 3 - Nos testes de compressão em amostras de concreto, se a empresa afirma que 90% da produção atende ao valor do fck = 30Mpa, construir um *I.C.* de 95% (α = 0.05) para a proporção de corpos de provas com fc abaixo de fck. Dos 13 corpos de prova os valores 24.83, 29.44 e 27.82 são menores do que o fck de 30Mpa. Então $\hat{p} = \frac{3}{13} = 0.231$.

RESOLUÇÃO:

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.231 - 1.96\sqrt{\frac{0.10 \cdot 0.90}{13}} = 0.0679$$

$$\hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.231 + 1.96\sqrt{\frac{0.10 \cdot 0.90}{13}} = 0.3941$$

Ou seja: $P(0.0679 \le p \le 0.3941) = 0.95$

Ou seja: $P($ 0.0679 ≤ p ≤ 0.3941 $)$= 0.95
Portanto, **(0.0679 ; 0.3941)** é um *I.C.* 95% para *p*.

Exercício 4 - Considere que no exemplo com os testes de compressão em amostras de concretos, além da *A* uma segunda marca *B* tenha sido avaliada com o intuito de que fossem comparadas.
Dados (MPa):

Dados (MPa):

A	31.04	31.11	39.56	24.83	36.97	34.86	29.44	39.15	$\bar{x}_A = 33.76$
	27.82	34.96	35.19	39.68	34.27				$s_A = 4.665$
B	27.91	40.94	39.25	37.42	32.16	34.29	38.69	21.21	$\bar{x}_B = 33.08$
	29.30	29.21	33.76	32.71	31.91	34.10	33.34		$s_B = 5.017$

a) Sabendo que as empresas afirmam que ambos os processos têm variabilidade σ^2 = 25MPa2, construir um *I.C.* para a diferença entre as médias das duas marcas.

RESOLUÇÃO
Como $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = 25$ então:

$$\frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}}$$

Logo, um *I.C.* 95% para (μ_A- μ_B) é dado por:

$$\left[(\bar{x}_A - \bar{x}_B) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} \quad ; \quad (\bar{x}_A - \bar{x}_B) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} \right]$$

Ou seja:

$$(\bar{x}_A - \bar{x}_B) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}$$

$$(33.76 - 33.08) \pm 1.96\sqrt{\frac{25}{13} + \frac{25}{15}}$$

Portanto **(–3.034 , 4.394)** é um *I.C.* 95% para (μ_A- μ_B).

Exercício 5 - Construir um *I.C.* 95% para a diferença entre as resistências médias à compressão em concretos feitos com cimentos das marcas *A* e *B*, considerando variâncias iguais e desconhecidas.

RESOLUÇÃO

$$\bar{x}_A = 33.76 \qquad \bar{x}_B = 33.08$$
$$s_A = 4.665 \qquad s_B = 5.017$$
$$n_A = 13 \qquad n_B = 15$$

$$\Rightarrow s_p^2 = \frac{12(4.665)^2 + 14(5.017)^2}{13+15-2} = \frac{613.5307}{26} = 26.597$$

$$s_p = 4.8577$$

$$\Rightarrow t_{(n_A+n_B-2);\alpha/2} = t_{26;0.025} = 2.0555$$

Logo, um *I.C.* 95% para (μ_A- μ_B) é dado por:

$$(\bar{x}_A - \bar{x}_B) \pm t_{26;0.025}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}$$

$$(33.76 - 33.08) \pm 2.0555 \times 4.8577\sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{15}}$$

Portanto **(–3.105 , 4.465)** é um *I.C.* 95% para (μ_A- μ_B) considerando variâncias iguais e desconhecidas.