Lista tópico 05.
Aluno: Rogério de Jesus Hultmann Filho GRR20137589

① De uma população $N(\mu, 9)$ extrai-se uma amostra aleatória simples de tamanho 25, obtendo $\sum_{i=1}^{25} x_i = 60$. Desenvolva detalhadamente um IC de 99% para a média populacional.

$$P(-z_{1-\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P\left(-z < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z\right) = 1-\alpha$$

$$-z < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z$$, isolando μ ....

$$-\frac{z\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{x} < -\mu < \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{x} \quad (\cdot -1)$$

$$\bar{x} + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x} - \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}$$ → arrumando da forma padrão

$$\bar{x} - \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}$$, nesse caso, $1-\alpha = 0,99$ e $\alpha/2 = 0,005$

z, tabelado $= 2,58$

$$\bar{x} - \frac{2,58 \cdot 9}{\sqrt{25}} < \mu < \bar{x} + \frac{2,58 \cdot 9}{\sqrt{25}}$$, se $\sum_{i=1}^{25} = 60$, $\bar{x} = 2,4$

$\therefore IC(\mu, 0,99) = [0,852; 3,948]$ //

① Uma a.a. de uma Normal apresenta as seguintes características: $n = 25$, $\bar{x} = 500$ e $S^2 = 900$. Construa $IC(\mu, 0{,}98)$.

Como a variância é desconhecida (e n pequeno), será usada a distribuição T.

$$P(-t_{1-\alpha/2} < T < t_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha, \text{ com } T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim T_{(n-1)}$$

$$P\left(-t_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha/2}\right) = 0{,}98$$

$$-t_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha/2}, \text{ isolando } \mu.$$

$$\frac{-t_{1-\alpha/2} \cdot S}{\sqrt{n}} - \bar{X} < -\mu < \frac{t_{1-\alpha/2} \cdot S}{\sqrt{n}} - \bar{X} \quad (\cdot -1)$$

$$\frac{t_{1-\alpha/2} \cdot S}{\sqrt{n}} + \bar{X} > \mu > -\frac{t_{1-\alpha/2} \cdot S}{\sqrt{n}} + \bar{X} \rightarrow$$

$$\bar{X} - \frac{t_{1-\alpha/2}\, S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{t_{1-\alpha/2} \cdot S}{\sqrt{n}} \rightarrow t_{24,0{,}01} = 2{,}492$$

$$500 - \frac{2{,}492 \cdot \sqrt{900}}{\sqrt{25}} < \mu < 500 + \frac{2{,}492 \cdot \sqrt{900}}{\sqrt{25}}$$

$$\therefore IC(\mu, 0{,}98) = [500 - 14{,}952;\ 500 + 14{,}952]$$

$$IC(\mu, 0{,}98) = [485{,}048;\ 514{,}952]$$

③ Em uma fábrica, uma amostra de 100 parafusos obteve uma média de diâmetro (em mm) de 13,78. Calcule um intervalo de confiança para o diâmetro médio de todos os parafusos da fábrica usando o nível de significância de 0,02. ($s^2 = 2{,}865$).

A variância é desconhecida, mas n é suficientemente grande para aproximarmos S^2 de modo que $S^2 = \sigma^2$ então $P(-z_{1-\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$, como demonstrado no exercício 1, $IC(\mu, 1-\alpha) = [\bar{x} - \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}]$, com $\bar{x} = 13{,}78$, $\sigma^2 = S^2 = 2{,}865$, $n=10$ e $z_{0{,}091} = 2{,}33$

$$IC(\mu, 0{,}98) = [13{,}78 - 2{,}33 \cdot \frac{\sqrt{2{,}865}}{\sqrt{100}} ; 13{,}78 + 2{,}33 \frac{\sqrt{2{,}865}}{\sqrt{100}}]$$

$$IC(\mu, 0{,}98) = [13{,}386 ; 14{,}174].$$

④ De uma população normal com μ e σ^2 desconhecidos, extrai-se uma amostra de tamanho 15, obtendo-se $\bar{x} = 12$ e $S^2 = 49$. Obtenha $IC(\sigma^2, 0{,}95)$.

(~~[illegible]~~) Como é normal, a quantidade pivotal será $Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ → não é uma distribuição simétrica, então será necessário achar $q_{\alpha/2, n-1}$ e $q_{1-\alpha/2; n-1}$.

$$P(q_{\alpha/2} < Q < q_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P\left(q_{\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < q_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$q_{\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < q_{1-\alpha/2}$$ → precisa isolar o σ^2.

Fazendo por partes,

i) $q_{\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightarrow \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{q_{\alpha/2}}$

ii) $\frac{(n-1)S^2}{q_{1-\alpha/2}} < \sigma^2$

$\therefore \frac{(n-1)S^2}{q_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{q_{1-\alpha/2}}$

$IC(\sigma^2, 1-\alpha) = \frac{(n-1)S^2}{q_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{q_{1-\alpha/2}} \rightarrow$ $q_{\alpha/2} = 26{,}119$

$q_{1-\alpha/2} = 5{,}629$

$IC = \left[\frac{14.49}{5{,}629} ; \frac{14.49}{26{,}119}\right] = [26{,}26 ; 121{,}87]$

5 Uma amostra de 300 habitantes de uma cidade revelou que 180 desejavam a fluoração da água. Encontre um IC para a verdadeira proporção dos que não querem a fluoração da água para $(1-\alpha) = 0{,}96$.

$\hat{p} = 0{,}4$ (não querem)

Como n é suficientemente grande,

$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$

Então

$P(-z < Z < z) = 1 - \alpha$

$$P\left(-z < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < z\right) = 1-\alpha \rightarrow \text{isolando } p:$$

$$-z\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} - \hat{p} < -p < z\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} - \hat{p} \qquad (\cdot -1)$$

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} > p > \hat{p} - z\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

$$\hat{p} - z\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < p < \hat{p} + z\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

usando uma abordagem otimista para esse caso, faremos $p_0 = \hat{p} = 0,4$.

$$IC(p, 0,96) = \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad , \; z_{0,02} = 2,05$$

$$= 0,4 \pm 2,05\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{300}}$$

$$= 0,4 \pm 0,05798$$

$$IC(p, 0,96) = [0,34202; 0,045798].$$