Lista: Experança e momentos - Prof. Elias

NOTA Resolva também os exercícios 1, 4-8 da seção 4.2. (não precisa entregar)

1. Um jogador lança uma moeda equilibrada até a ocorrência de dois resultados iguais sucessivos. Determine o valor esperado do número de lançamentos.

2. Em ensaios de Bernoulli independentes, com probabilidade p de sucesso, seja X o número de fracassos anteriores ao $r-$ésimo sucesso. A variável X segue o modelo Binomial Negativo de parâmetros r e p. Determine a média de X.

3. Considere as seguintes funções de probabilidade

   (a)
$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \leq 1 \\ (x-1)^2, & se \quad x \in (1,2) \\ 1, & se \quad x \geq 2 \end{cases}$$

   (b)
$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \leq 1 \\ (1+x)/3, & se \quad x \in (-1,0) \\ 1/3 + x/3, & se \quad x \in [0,2) \\ 1, & se \quad x \geq 2 \end{cases}$$

   (c)
$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < -1 \\ 1/3, & se \quad x \in [-1,0) \\ 1/2, & se \quad x \in [0,1) \\ 3/4, & se \quad x \in [1,2) \\ 1, & se \quad x \geq 2 \end{cases}$$

   Calcule E(X) considerando

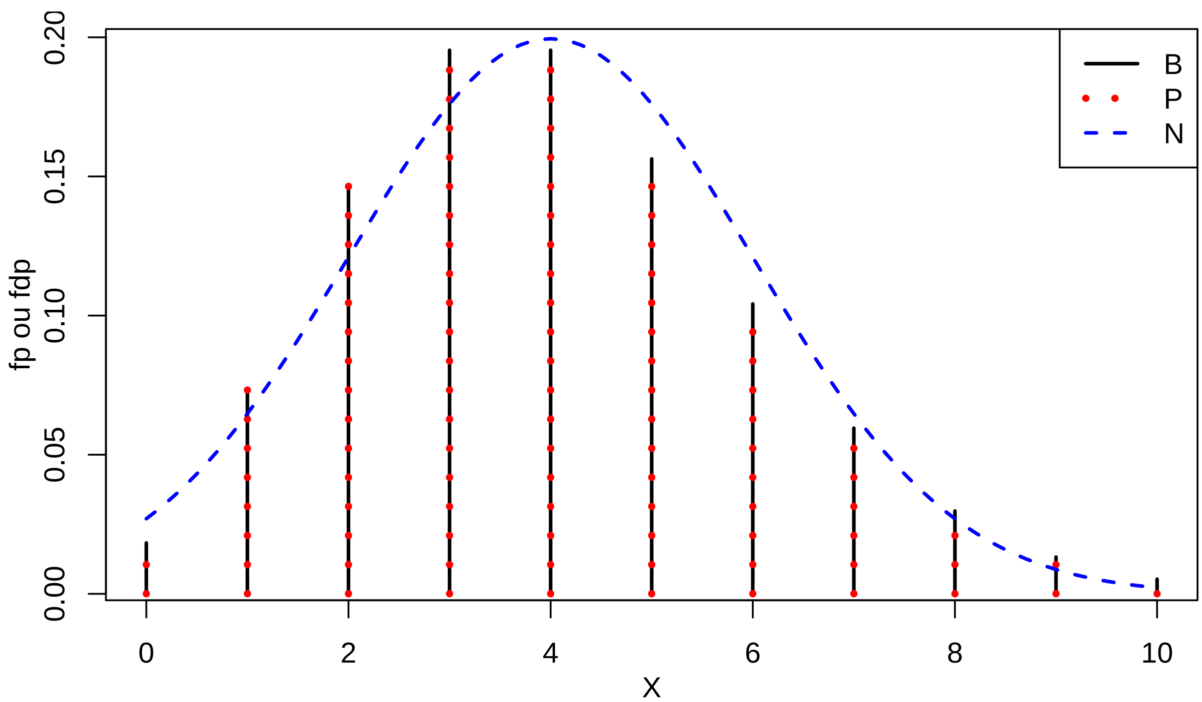
   i. cada F(X)
   ii. a fp ou fdp correspondente a cada caso

4. Calcule V(X) nos três casos anteriores

5. Considere que de mil segurados numa carteira. De anos anteriores, espera-se que 0.4% dos segurados sofra algum tipo de sinistro em um ano. Seja X o número de sinistros em um ano. Considere que precisa-se saber qual a probabilidade do número de sinistros diferir mais de 3 do número esperado de X.

   (a) Calcule essa probabilidade considerando a distribuição Binomial.
   (b) Calcule essa probabilidade uma aproximação pela distribuição de Poisson.
   (c) Calcule essa probabilidade considerando uma aproximação pela distribuição Normal
   (d) Determine o limite superior dessa probabilidade considerando a desigualdade de Chebyshev

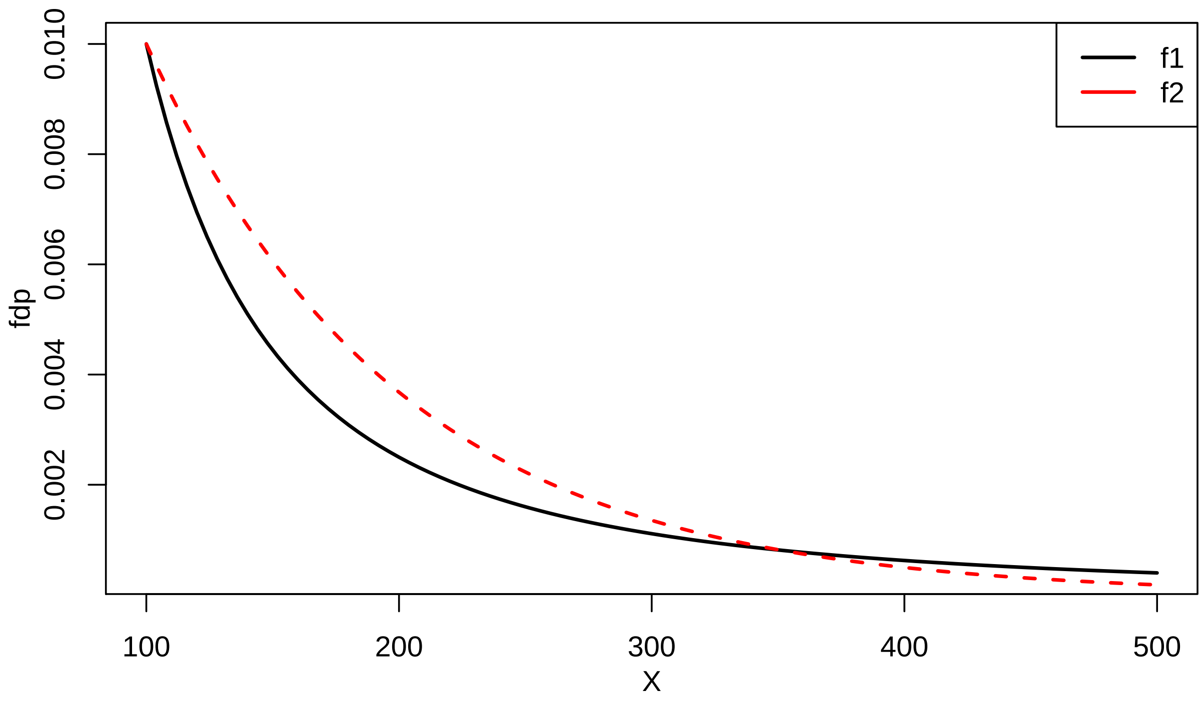
   Nota: A fp Binomial (B), a aproximação pela fp de Poisson (P) e a aproximação pela fdp Normal (N) pode ser visualizada na Figura abaixo para a parte relevante do intervalo de variaçõ de X:



6. Suponha que a duração da vida (em horas) de uma certa válvula seja uma variável aleatória contínua X com fdp $f(x) = 100/x^2$, para $x > 100$, e zero para quaisquer outros valores de x.
   (a) Obtenha o valor esperado de X
   (b) Calcule a probabilidade do tempo diferir mais de 50 do número esperado
   (c) Determine o limite superior dessa probabilidade considerando a desigualdade de Chebyshev
7. Refaça os cálculos do exercício anterior considerando que $f(x) = \frac{1}{100}e^{-(x-100)/100}$

   Dica: Os cálculos nos dois ítens anteriores podem ser simplificados considerando a *fdp* de $Y = aX$, com a uma constante escolhida convenientemente.

   Nota: A *fdp* destes dois ítens pode ser visualizada na Figura abaixo:



8. Encontre a função geradora de momentos de cada uma das v.a. especificadas a seguir:

   (a) $X \sim$ Geometrica(p)
   (b) $X \sim$ Binomial Negativa(n,p)
   (c) $X \sim$ Poisson(λ)
   (d) $X \sim$ Uniforme(a, b)
   (e) $X \sim$ Gamma(a, b)
   (f) $f(x) = 3x^2 I_{(0,1)}(x)$
   (g) $X \sim$ Beta(a,b)

9. Encontre E(X) e V(X) considerando os resultados do ítem anterior

10. Considere $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$, com X_i independente de X_j para todo $i \neq j$. Encontre a FGM de Y, E(Y) e V(Y) quando

    (a) $X_i \sim$ Geometrica(p)
    (b) $X_i \sim$ Poisson(λ)
    (c) $X_i \sim$ Uniforme(a, b)
    (d) $X_i \sim$ Exp(β)
    (e) $X_i \sim$ N(μ, σ^2)