Lista: Convergência de variáveis aleatórias - Prof. Elias

1. Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ tal que P($X_n = n^2$)=$1/n$ e P(X_n=0)=$1 - 1/n$. Mostre que $\lim_{n\to\infty}$ E(X_n)=∞ mas $X_n \xrightarrow{p} 0$.

2. Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ uma sequencia de variáveis aleatórias tal que para $n = 2, 3, ...$ a P($X_n = 1/n$)=$1 - 1/n^2$ e P($X_n = 0$)=$1/n^2$. Existe uma constante b para a qual essa sequencia converge em

   (a) probabilidade?

   (b) média quadrática?

3. Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias com E(X_i)=μ e Var(X_i)=$\sigma^2 < \infty$. Seja $S_n = X_1 + X_2, ... + X_n$ e $\overline{X} = S_n/n$. Mostre que

   (a) $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}[|\frac{S_n}{n} - \mu| \geq \epsilon] = 0$, para qualquer $\epsilon > 0$ (Lei Fraca dos Grandes Números via Chebyshev)

   (b) $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[(\frac{S_n}{n} - \mu)^2] = 0$

   (c) $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2] = \sigma^2$

   (d) $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2] = \sigma^2$

4. Seja $X_n \sim Binomial(n, p)$. Assuma que $\lim_{n\to\infty} np = \lambda$. Prove que a função geradora de momentos de X_n converge para a função geradora de momentos de uma variável aleatória Poisson(λ) quando $n \to \infty$.

5. Seja $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ e $Z_n = [S_n - \mathrm{E}(S_n)]/\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}$. Prove que Z_n converge para N(0,1) (Teorema do Limite Central) via função geradora de momentos quando

   (a) $X_i \sim Gamma(a, b)$

   (b) $X_i \sim Poisson(\lambda)$

   (c) Não importando a distribuição de X_i, apenas que E(X_i)=μ e que Var(X_i)=$\sigma^2 < \infty$.

6. Considere n amostras aleatórias tomadas de uma distribuição com média μ e desvio padrão σ.

   (a) Use a desigualdade de Chebyshev para determinar o menor n tal que

   $$\mathrm{P}(|\overline{X}_n - \mu| \geq \sigma/4) \leq 0,99$$

   (b) Use o teorema do limite central para satisfazer aproximadamente essa probabilidade

7. Sejam $X_1, X_2, ..., X_{20}$ variáveis aleatórias independentes com $X_i \sim Poisson(\lambda = 1)$. Considere $P(\sum_{i=1}^{20} X_i > 15)$.

   (a) Use a desigualdade de Markov para obter um limite para essa probabilidade

   (b) Use o limite de Chernoff para obter um limite para essa probabilidade

   (c) Use o teorema central do limite para aproximar essa probabilidade