Avaliação S -CE209, semestre 2011-1 - Prof. Elias T. Krainski
Aluno:

BOA PROVA!

1. (20pts) Considere X uma váriável aleatória e considere $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória dessa variável. Encontre uma estatística suficiente para θ, quando X segue uma distribuição
   (a) de Poisson(θ)
   (b) Uniforme(θ, 0)
   (c) dada por
   $$f(x|\theta) = \{ \begin{array}{ll} \theta x^{\theta-1} & se \quad 0 < x < 1 \quad \theta > 0 \\ 0 & c.\ c. \end{array} .$$

2. (20pts) Considere o número de pessoas X com menos de 60 anos que chegam a um caixa de um banco até uma pessoa com mais de 60 anos chegar. Considere que X segue uma distribuição de probabilidades Geométrica(θ) isto é, a função de probabilidade de X é dada por
   $$f(x|\theta) = \{ \begin{array}{ll} (1-\theta)^x\theta & se \quad x = 0,1,2,...\} \quad 0 < \theta < 1 \\ 0 & c.\ c. \end{array} .$$
   com $E(X) = (1-\theta)/\theta$ e $V(X) = (1-\theta)/\theta^2$
   Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória
   (a) Encontre uma estatística suficiente para θ
   (b) Encontre o estimador de θ pelo método dos momentos
   (c) Encontre o estimador de θ pelo método da máxima verossimilhança

3. (10pts) (ENADE 2009) A taxa de gordura corporal (massa de gordura dividida pela massa total) de mulheres adultas tem distribuição Beta com parâmetros 1 e $\theta > 0$, cuja função de densidade de probabilidade é
   $$f(x|\theta) = \{ \begin{array}{ll} \theta(1-x)^{\theta-1} & se \quad 0 < x < 1 \\ 0 & c.\ c. \end{array} .$$
   Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória simples de mulheres adultas dessa região. O estimador de Máxima Verossimilhança de θ é
   (a)
   $$-\frac{\sum_{i=1}^n ln(1-X_i)}{n}$$
   (b)
   $$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$
   (c)
   $$-\frac{n}{\sum_{i=1}^n ln(1-X_i)}$$
   (d)
   $$\frac{\sum_{i=1}^n ln(X_i)}{n}$$
   (e)
   $$\frac{n}{\sum_{i=1}^n ln(1-X_i)}$$

4. (20pts) Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória da distribuição Normal(μ, θ) e considere os estimadores $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ e $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{}$. Calcule a eficiência de cada um. Qual é mais eficiente?

5. (30pts) Considere X uma amostra aleatória da distribuição Gamma(α, β), isto é,
   $$f(x|\alpha, \beta) = \{ \begin{array}{ll} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-x/\beta} & se \quad x > 0, \\ 0 & c.\ c. \end{array} .$$
   com $E(X) = \alpha\beta$ e $V(X) = \alpha\beta^2$
   (a) Encontre os estimadores de α e β pelo método dos momentos
   (b) Encontre a estatística conjuntamente suficiente mínima e completa para α e β
   (c) Encontre os estimadores de α e β pelo método da máxima verossimilhança