

Lista 1 CE210, semestre 20092

Prof. Elias T. Krainski

1. Seja X uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade

$$f_X(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{se } 0 < x < 1, \theta > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Mostre que $f_X(x|\theta)$ é uma função de densidade de probabilidade para todo $\theta > 0$
- (b) Obtenha a esperança de X , a variância de X e o valor numérico de ambas quando $\theta = 1$
- (c) Faça o gráfico de $f_X(x|\theta)$ para: $\theta = 0.5$, $\theta = 1$ e $\theta = 3$
- (d) Mostre que $-\theta \log(X)$ é uma quantidade pivotal
- (e) Use a quantidade pivotal anterior e obtenha um intervalo de confiança para θ
2. Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição $N(0, \theta)$. Obtenha uma quantidade pivotal e construa um IC para θ baseado nessa quantidade pivotal.
3. Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição $N(\theta, 1)$. Obtenha uma quantidade pivotal e construa um IC para θ baseado nessa quantidade pivotal.
4. Resolva os exercícios 4, 11, 12, e 17 a 22 das páginas 69 a 72 apostila. (obs.: no exercício 19, lembre que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.)
5. Considere $X \sim N(3, \theta)$ e que

1.94 3.31 1.58 5.71 3.56 1.61 3.83 4.26 3.98 2.48

são os valores de 10 amostras aleatorias e independentes dessa variável aleatória.

- (a) Obtenha a estimativa de máxima verosimilhança de θ
- (b) Obtenha um intervalo de 95% de confiança para θ considerando uma quantidade pivotal
- (c) Obtenha um intervalo assintótico de 95% de confiança para θ
- (d) Obtenha um intervalo de 95% de confiança baseado na função *deviance*
- (e) Comente sobre os intervalos
6. Considere a variável aleatória do exercício 1 e os valores das 10 amostras aleatórias dessa variável a seguir

0.52 0.61 0.76 0.95 0.45 0.95 0.97 0.81 0.79 0.25

- (a) Faça um histograma desses dados dividindo o intervalo de 0 a 1 em 5 classes (0-0.2; 0.2-0.4; 0.4-0.6; 0.6-0.8; 0.8-1)
 - (b) Obtenha o valor da estimativa de máxima verossimilhança de θ com os dados do item anterior
 - (c) Faça o gráfico da função de densidade X considerando θ igual ao valor estimado no item anterior
 - (d) Obtenha os valores do intervalo de confiança assintótico, considerando 95% de confiança
 - (e) Faça um gráfico da função de verossimilhança e da função deviance
 - (f) Obtenha o IC de 95% baseado na distribuição limite da função *deviance*
 - (g) Compare a amplitude desses intervalos.
7. Seja X uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade exponencial dada por

$$f_X(x|\theta) = \begin{cases} \theta^{-1}e^{-x/\theta} & \text{se } x > 0, \theta > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (2)$$

- (a) Obtenha um intervalo de confiança considerando que $2T/\theta \sim \chi_{2n}^2$, onde $T = \sum_{i=1}^n$. Ou seja, $2T/\theta$ é uma quantidade pivotal.
- (b) Obtenha o EMV de θ
- (c) Obtenha o IC assintótico para θ
- (d) Considere as 10 amostras a seguir dessa variável aleatória
2.27 3.54 0.44 0.42 1.31 8.68 3.69 1.62 2.87 0.44
e obtenha a estimativa de máxima verossimilhança de θ
- (e) Faça um histograma para esses dados e sobreponha a curva da função de densidade com θ igual ao valor estimado
- (f) Construa o gráfico da função de verossimilhança e da função *deviance*
- (g) Obtenha um IC baseado na quantidade pivotal, um IC assintótico e um IC baseado na distribuição limite da função *deviance*, todos de 95% e para θ . Compare a amplitude desses intervalos.