

Medidas resumo

Fernando de Pol Mayer

Laboratório de Estatística e Geoinformação (LEG)
Departamento de Estatística (DEST)
Universidade Federal do Paraná (UFPR)



Este conteúdo está disponível por meio da Licença Creative Commons 4.0
(Atribuição/NãoComercial/Partilha Igual)

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-padrão
Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

Características importantes de qualquer conjunto de dados

- Centro
- Variação
- Distribuição
- Valores atípicos

Medidas
resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de
variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-
padrão
Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de
posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

Definição

É um valor no centro, ou meio, do conjunto de dados

Ferramentas para **resumo** e **análise** de dados

- Média
- Mediana
- Moda

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio- padrão

Coefficiente de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos 5 números

Box plots

Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana Média

Medidas de variação

Amplitude Desvio médio

Variância

Desvio- padrão

Coefficiente de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos 5 números

Box plots

Exercícios

A **moda** é o valor que ocorre com **maior frequência** em um conjunto de dados

Dependendo do conjunto de dados, ele pode ser

- **Sem moda** quando nenhum valor se repete
- **Unimodal** quando existe apenas um valor repetido com maior frequência
- **Bimodal** quando existem dois valores com a mesma maior frequência
- **Multimodal** quando mais de dois valores se repetem com a mesma frequência

Medidas
resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda

Mediana
Média

Medidas de
variação

Amplitude
Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de
posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

Qual é a moda?

A) 2 5 7 9 13 15 22

B) 16 19 19 21 21 21 23 27

C) 2 7 7 13 15 15 22

Qual é a moda?

ótimo	bom	bom	péssimo	bom	bom	ótimo
ótimo	bom	ótimo	bom	ótimo	bom	bom
ótimo	bom	péssimo	bom	péssimo	bom	péssimo
bom	bom	bom	bom	ótimo	bom	péssimo
ótimo	ótimo	bom	péssimo			

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana Média

Medidas de variação

Amplitude Desvio médio

Variância Desvio- padrão

Coefficiente de Variação Exercícios

Medidas de posição

Percentis Quartis

Resumo dos 5 números

Box plots Exercícios

Vantagens

- **Resistente** à valores extremos
- É a única medida de centro que pode ser usada para dados **qualitativos**

Desvantagens

- É uma medida **viesada**

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio- padrão

Coefficiente de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos 5 números

Box plots

Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - **Mediana**
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio- padrão

Coeficiente de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos 5 números

Box plots

Exercícios

A **mediana** é uma medida de centro que é o **valor do meio**, quando os dados são arranjados de maneira **ordenada**

É o valor cuja posição separa o conjunto de dados em duas partes iguais

Quando as observações são ordenadas em ordem crescente, vamos denotar a menor observação por $x_{(1)}$, a segunda por $x_{(2)}$, e assim por diante, obtendo-se

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n-1)} \leq x_{(n)}$$

Estas observações ordenadas são chamadas de **estatísticas de ordem**.

Por exemplo, se cinco observações de uma variável forem $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = 8$, $x_5 = 7$, então

$$3 \leq 4 \leq 7 \leq 8 \leq 8$$

E as estatísticas de ordem são: $x_{(1)} = 3$, $x_{(2)} = 4$, $x_{(3)} = 7$, $x_{(4)} = 8$, $x_{(5)} = 8$.

Nesse exemplo, a mediana (Md) é 7, pois é o valor que separa o conjunto de dados em duas partes iguais.

Mas note que o número de observações é par. Caso fosse ímpar, a mediana seria a média aritmética das duas observações centrais.

De maneira geral, a mediana de uma variável X pode ser definida por:

$$Md(X) = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

Portanto, no exemplo anterior, se tivéssemos

$$3 \leq 4 \leq 7 \leq 8 \leq 8 \leq 9$$

Então

$$Md = \frac{x_{(3)} + x_{(4)}}{2} = \frac{7 + 8}{2} = 7,5$$

Medidas resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de
variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de
posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

Número ímpar de elementos

2 4 6 7 11

Medidas resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de
variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de
posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

Número par de elementos

2 4 7 9 11 13

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio- padrão

Coeficiente de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos 5 números

Box plots

Exercícios

Vantagens

- Medida **resistente**
- Não é influenciada pela presença de valores extremos

Desvantagens

- É uma medida **viesada**

Medidas
resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de
variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-
padrão
Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de
posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - **Média**
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

A **média aritmética** de um conjunto de dados é a medida de tendência central encontrada pela soma de todos os valores, dividida pelo número total de elementos, ou seja,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

No exemplo anterior, temos então que a média de 3, 4, 7, 8, 8 é

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{5} \cdot (3 + 4 + 7 + 8 + 8) \\ &= \frac{1}{5} \cdot (30) \\ &= 6\end{aligned}$$

Medidas
resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de
variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-
padrão
Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de
posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

Considere a nota das provas de 5 alunos em uma sala com 30 alunos

7,0 3,0 5,5 6,5 8,0

Note que a média é o **ponto de equilíbrio de massa** dos dados

Medidas
resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de
variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de
posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

Considere o valor dos salários de todos os 6 empregados de uma pequena empresa

860,00 750,00 980,00 1.200,00 790,00 950,00

Calcule a média populacional

Agora, se tivermos n observações da variável X , das quais f_1 são iguais a x_1 , f_2 são iguais a x_2 , \dots , f_k são iguais a x_k , então a média pode ser definida por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_k f_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i f_i$$

Note que, se as frequências relativas são $fr_i = f_i/n$, então a equação acima também pode ser escrita como

$$\bar{x} = x_1 fr_1 + x_2 fr_2 + \dots + x_k fr_k = \sum_{i=1}^k x_i fr_i$$

Como exemplo, considere a tabela de frequência abaixo:

Número	f_i	fr_i
0	4	0,20
1	5	0,25
2	7	0,35
3	3	0,15
5	1	0,05
Total	20	1

A média é calculada por:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{20} \cdot (0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + \dots + 5 \cdot 1) \\
 &= \frac{1}{20} \cdot (33) \\
 &= 1,65
 \end{aligned}$$

No caso de variáveis contínuas resumidas em tabelas de frequência com intervalos de classe, a média pode ser aproximada, calculando-se o **ponto médio** de cada classe

$$PM = \frac{\lim_{inf} + \lim_{sup}}{2}$$

e supor que os valores dentro de cada classe sejam iguais ao ponto médio. Nesse caso, ficamos com a mesma situação para o caso discreto, onde a média é calculada com pares (x_i, f_i) ou (x_i, fr_i) .

Claramente isso é uma aproximação, pois estamos perdendo informação ao assumir que todos os valores de uma classe sejam iguais. Portanto, deverá haver alguma diferença entre esta média aproximada e a média que seria calculada com os valores originais.

Considere a seguinte tabela de distribuição de frequência:

Classe	f_i	fr_i
[4, 8)	10	0,278
[8, 12)	12	0,333
[12, 16)	8	0,222
[16, 20)	5	0,139
[20, 24)	1	0,028
Total	36	1

Considerando os pontos médios de cada classe, a média é calculada por

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{36} \cdot (6 \cdot 10 + 10 \cdot 12 + \dots + 22 \cdot 1) \\
 &= \frac{1}{36} \cdot (404) \\
 &= 11,22
 \end{aligned}$$

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

Vantagens

- Medida **não viesada**
- A média tende a ser mais **consistente** do que outras medidas de centro

Desvantagens

- Sensível à valores extremos
- Medida não **resistente**

Você está procurando um estágio nas empresas A e B. Cada empresa oferece remuneração por 20 horas semanais com as seguintes característica (em salários mínimos)

	A	B
média	2,5	2,0
mediana	1,7	1,9
moda	1,5	1,9

Qual você escolheria?

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda Mediana Média

Medidas de variação

Amplitude Desvio médio Variância Desvio-padrão Coeficiente de Variação Exercícios

Medidas de posição

Percentis Quartis Resumo dos 5 números Box plots Exercícios

Para notar como a média é influenciada pela presença de valores extremos

$$5 \ 7 \ 10 \ 13 \ 15 \Rightarrow \bar{x} = 10 \text{ e } Me = 10$$

$$5 \ 7 \ 10 \ 13 \ 65 \Rightarrow \bar{x} = 20 \text{ e } Me = 10$$

Nos casos onde se deseja comparar bases de dados diferentes, normalmente a mediana é mais indicada, por ser uma medida mais **robusta**, *não influenciada por valores extremos*

Medidas
resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de
variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de
posição

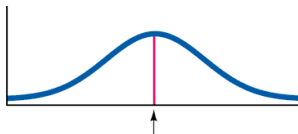
Percentis

Quartis

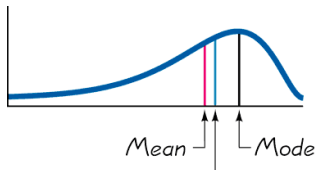
Resumo dos
5 números

Box plots

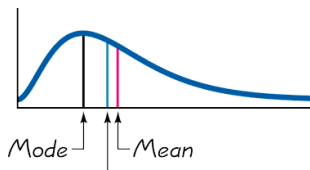
Exercícios



$$\text{Mode} = \text{Mean} = \text{Median}$$



$$\text{Mean} \quad \text{Median} \quad \text{Mode}$$



$$\text{Mode} \quad \text{Median} \quad \text{Mean}$$

Exemplo: Os dados abaixo se referem ao percentual de cobertura de vegetação em duas áreas de uma floresta.

Área A: 43 47 48 51 51 55 55 57 59

Área B: 20 22 45 46 53 54 56 57

- Calcule a média, a mediana e a moda para a área A. Qual a medida de tendência central melhor representa esse conjunto de dados? Por quê?
- Calcule a média, a mediana e a moda para a área B. Qual a medida de tendência central melhor representa esse conjunto de dados? Por quê?

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-
padrão
Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

O resumo de um conjunto de dados exclusivamente por uma medida de centro, **esconde** toda a informação sobre a variabilidade do conjunto de observações

Não é possível analisar um conjunto de dados apenas através de uma medida de tendência central

Por isso precisamos de medidas que resumam a **variabilidade** dos dados em relação à um valor central

Medidas
resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de
variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de
posição

Percentis

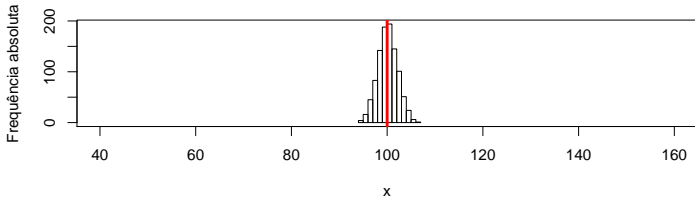
Quartis

Resumo dos
5 números

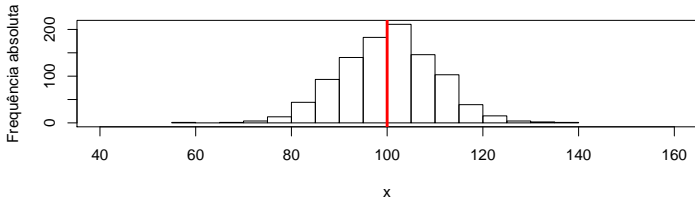
Box plots

Exercícios

$N(100, 4)$



$N(100, 100)$



Cinco grupos de alunos se submeteram a um teste, obtendo as seguintes notas

Grupo	Notas	\bar{x}
A	3, 4, 5, 6, 7	5
B	1, 3, 5, 7, 9	5
C	5, 5, 5, 5, 5	5
D	3, 5, 5, 7	5
E	3, 5, 5, 6, 6	5

O que a média diz a respeito das notas quando comparamos os grupos?

Medidas resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de
variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coeficiente
de Variação

Exercícios

Exercícios

Medidas de
posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

Definição

São medidas estatísticas que caracterizam o quanto um conjunto de dados está disperso em torno de sua tendência central

Ferramentas para **resumo** e **análise** de dados

- Amplitude
- Desvio-médio
- Variância
- Desvio-padrão
- Coeficiente de Variação

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-
padrão
Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

A **amplitude** de um conjunto de dados é a diferença entre o maior e o menor valor.

$$AMP = \max - \min$$

Como a amplitude usa **apenas** os valores máximo e mínimo, é muito **sensível** a valores extremos

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-
padrão
Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

Calcule a média e a amplitude do número de acertos em uma prova com 50 questões

31 27 42 35 47 28 7 45 15 20

Calcule a média e a amplitude para a idade de um grupo de pessoas

4 3 4 3 4 3 21

Para melhorar a medida de variabilidade, devemos considerar **todos os dados disponíveis**

A melhor forma de se fazer isso é considerar o **desvio** de cada valor em relação à média

Como queremos um **resumo** da variabilidade, devemos fazer a **soma** dos desvios

Considere as notas do grupo A do exemplo acima ($\bar{x} = 5$)

Grupo A	$x_i - \bar{x}$
3	-2
4	-1
5	0
6	1
7	2
Soma	0

Como a soma dos desvios é **sempre** zero, temos duas alternativas

- Considerar o total dos desvios absolutos (em módulo)

$$\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

- Considerar o total dos quadrados dos desvios

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

O uso destes totais pode causar dificuldades quando comparamos conjuntos de dados de tamanhos diferentes. Desse modo é mais conveniente exprimir estas medidas como **médias** (dividindo as somas por n). Assim teremos:

- Desvio médio
- Variância

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio

Variância
Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

O **desvio médio** é definido como a média aritmética dos desvios em módulo (valor absoluto)

$$DM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

No exemplo anterior

Grupo A	$x_i - \bar{x}$	$ x_i - \bar{x} $
3	-2	2
4	-1	1
5	0	0
6	1	1
7	2	2
Soma	0	6

$$DM = \frac{6}{5} = 1,2$$

Medidas resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de
variação

Amplitude
Desvio médio

Variância
Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de
posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

Mas, o desvio médio é baseado em uma operação **não algébrica** (módulo), o que cria dificuldades em análises posteriores

Além disso, é uma medida **viesada**

Uma alternativa melhor é a **soma dos quadrados dos desvios**

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão
Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - **Variância**
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

A **variância** é definida como a *média aritmética* da soma dos quadrados dos desvios.

Variância amostral

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Uma fórmula alternativa da variância pode ser obtida desenvolvendo-se o quadrado no numerador da expressão anterior

$$s^2 = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \right]$$

No exemplo anterior

Grupo A	$x_i - \bar{x}$	$ x_i - \bar{x} $	$(x_i - \bar{x})^2$
3	-2	2	4
4	-1	1	1
5	0	0	0
6	1	1	1
7	2	2	4
Soma	0	6	10

$$s^2 = \frac{10}{5} = 2$$

Assim como no caso da média, se tivermos n observações da variável X , das quais f_1 são iguais a x_1 , f_2 são iguais a x_2 , \dots , f_k são iguais a x_k , então a variância pode ser definida por:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k fr_i (x_i - \bar{x})^2$$

Ou, pela fórmula alternativa

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot f_i - \frac{(\sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i)^2}{n} \right] \\ &= \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot fr_i - \left(\sum_{i=1}^k x_i \cdot fr_i \right)^2 \end{aligned}$$

Onde $fr_i = f_i/n$, e $n = \sum_{i=1}^k f_i$.

Como exemplo, considere a tabela de frequência abaixo ($\bar{x} = 1,65$):

Número	f_i	fr_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
0	4	0,20	-1,65	2,72
1	5	0,25	-0,65	0,42
2	7	0,35	0,35	0,12
3	3	0,15	1,35	1,82
5	1	0,05	3,35	11,22
Total	20	1		16,31

A variância pode ser calculada por:

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{1}{20} \cdot [4 \cdot 2,72 + 5 \cdot 0,42 + \dots + 1 \cdot 11,22] \\
 &= \frac{1}{20} \cdot (30,55) \\
 &= 1,528
 \end{aligned}$$

Considere a seguinte tabela de distribuição de frequência ($\bar{x} = 11,22$):

Classe	PM = x_i	f_i	fr_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
[4, 8)	6	10	0,278	-5,222	27,272
[8, 12)	10	12	0,333	-1,222	1,494
[12, 16)	14	8	0,222	2,778	7,716
[16, 20)	18	5	0,139	6,778	45,938
[20, 24)	22	1	0,028	10,778	116,160
Total		36	1		198,58

Considerando os pontos médios de cada classe, a variância pode ser calculada por

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{36} \cdot [10 \cdot 27,272 + 12 \cdot 1,494 + \dots + 1 \cdot 116,160] \\
 &= \frac{1}{36} \cdot (698,22) \\
 &= 19,395
 \end{aligned}$$

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

A variância amostral s^2 é considerada um estimador **não viesado** da variância populacional σ^2

É utilizada em diversos métodos estatísticos e caracteriza todas as distribuições de probabilidade

No entanto, as *unidades da variância são diferentes das unidades dos dados originais* (são medidas ao quadrado, como notas ao quadrado ou cm^2)

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-
padrão

Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - **Desvio-padrão**
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

O **desvio-padrão** é a raiz quadrada da variância

Desvio-padrão amostral

$$s = \sqrt{s^2}$$

Sendo que s^2 é calculada a partir de qualquer uma das formas anteriores.

Propriedades do desvio-padrão

- É uma medida de variação de todos os dados em relação à **média**
- É sempre positivo ou nulo
 - Valores mais distantes da média tem desvio-padrão maior
 - Valores mais próximos da média tem desvio-padrão menor
- A unidade do desvio-padrão é a mesma dos dados originais (por exemplo notas ou cm)
- A inclusão de valores **extremos** pode afetar drasticamente o valor do desvio-padrão

Medidas resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de
variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de
posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

Exemplo: Os dados abaixo se referem ao percentual de cobertura de vegetação em duas áreas de uma floresta.

Área A: 43 47 48 51 51 55 55 57 59

Área B: 20 22 45 46 53 54 56 57

- Calcule o desvio-padrão para as duas áreas.
- Podemos comparar essas duas medidas? O que podemos concluir?

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-
padrão

Coefficiente de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - **Coefficiente de Variação**
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coeficiente de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

O **Coeficiente de Variação** (CV) mede a dispersão dos dados em relação à média (medido em %)

Coeficiente de variação amostral

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

É utilizado para se comparar a variação de um ou mais conjuntos de dados

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro Moda Mediana Média

Medidas de variação

Amplitude Desvio médio Variância Desvio- padrão

Coeficiente de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis Quartis Resumo dos 5 números Box plots Exercícios

Qual o Coeficiente de Variação para as duas áreas do exemplo anterior:

Área A: 43 47 48 51 51 55 55 57 59

Área B: 20 22 45 46 53 54 56 57

O que podemos concluir?

O Coeficiente de Variação é muito útil também para se comparar dados medidos em escalas diferentes. Por exemplo

	Média	Desvio-padrão
Altura	174 cm	7 cm
Peso	78 kg	12 kg

Só podemos comparar o desvio-padrão com unidades diferentes através do CV

$$CV_A = \frac{7}{174} \cdot 100\% = 4\% \quad CV_P = \frac{12}{78} \cdot 100\% = 15,4\%$$

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-padrão
Coeficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

Medidas resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de
variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Exercícios

Medidas de
posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

Considere a tabela de frequência abaixo:

Classe	f_i
1,0 † 2,5	3
2,5 † 4,0	5
4,0 † 5,5	3
5,5 † 7,0	7
7,0 † 8,5	9
8,5 † 10,0	13

Calcule a média, a variância, o desvio-padrão, e o CV para este conjunto de dados.

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-padrão
Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-
padrão
Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

Tanto a média como o desvio-padrão podem não ser medidas adequadas para representar um conjunto de dados, pois:

- São afetados, de forma exagerada, por valores extremos
- Apenas com estes dois valores não temos ideia da simetria ou assimetria da distribuição dos dados

Por isso, outras medidas podem ser consideradas.

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

Vimos que a mediana é um valor que deixa metade dos dados abaixo dela, e metade acima, e é uma medida **resistente**.

De modo geral, podemos definir uma medida, chamada **quantil de ordem p** ou **p -quantil**, indicada por $Q(p)$, onde p é uma proporção qualquer, $0 < p < 1$, de modo que $100p\%$ das observações sejam menores do que $Q(p)$. Por exemplo:

- $Q(0, 25) = Q_1 = P_{25}$: 1º quantil = 25º percentil
- $Q(0, 50) = Q_2 = P_{50}$: 2º quantil = 50º percentil = Mediana
- $Q(0, 75) = Q_3 = P_{75}$: 3º quantil = 75º percentil
- $Q(0, 40) = P_{40}$: 4º decil = 40º percentil
- $Q(0, 95) = P_{95}$: 95º percentil

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-padrão
Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

Medidas
resumo

Introdução

Medidas de
centro

Moda

Mediana
Média

Medidas de
variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de
posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

Definição

Percentis são medidas de posição, denotados por P_1, P_2, \dots, P_{99} que dividem os dados em 100 grupos, com cerca de 1% cada grupo

Por exemplo

- O 50º percentil, P_{50} , tem cerca de 50% dos valores abaixo dele, e 50% de valores acima dele
 - Nesse caso, $P_{50} = \text{Mediana}$

Para determinar um percentil:

- Encontre a posição

$$\text{Pos}P_i = \frac{i(n+1)}{100}, \quad i = 1, \dots, 99$$

- Se o valor for fracionário calcule o valor intermediário

Calcule o P_{30} e o P_{65} para os dois conjuntos de dados abaixo

[1] 10 11 12 12 15 16 17 20 21 23 25 25 28 30

[1] 10 11 12 12 15 16 17 20 21 23 25 25 28 30 59

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-
padrão
Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

Definição

Quartis são medidas de posição, denotadas por Q_1 , Q_2 , Q_3 que dividem um conjunto de dados em 4 grupos, com cerca de 25% dos valores em cada grupo

Q_1 (**Primeiro quartil**): Separa os 25% inferiores dos 75% superiores dos valores ordenados

Q_2 (**Segundo quartil**): O mesmo que a **mediana**. Separa os 50% valores ordenados inferiores dos 50% superiores

Q_3 (**terceiro quartil**): Separa os 75% valores ordenados inferiores dos 25% superiores

Para determinar um quartil:

- Encontre a posição

$$\text{Pos}Q_i = \frac{i(n+1)}{4}, \quad i = 1, \dots, 3$$

- Se o valor for fracionário calcule o valor intermediário

Calcule os quartis para os dois conjuntos de dados abaixo

[1] 10 11 12 12 15 16 17 20 21 23 25 25 28 30

[1] 10 11 12 12 15 16 17 20 21 23 25 25 28 30 59

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

Os quartis são medidas de posição **resistentes** de uma distribuição.

Uma medida de variação alternativa ao desvio-padrão é a **distância interquartil**, que é a diferença entre o 3º e o 1º quartis, ou seja,

$$d_Q = Q_3 - Q_1$$

Com isso, sabemos que 50% das observações se encontram entre Q_1 e Q_3 , e a medida d_Q mede a amplitude desses valores.

Os cinco valores:

- $x_{(1)}$: mínimo
- Q_1 : 1º quartil
- Q_2 : 2º quartil
- Q_3 : 3º quartil
- $x_{(n)}$: máximo

compõem o chamado **resumo dos cinco números**, e são importantes para se ter uma boa ideia da assimetria da distribuição dos dados.

Resumo dos 5 números

O resumo dos cinco números consiste no valor mínimo, primeiro quartil, segundo quartil (mediana), terceiro quartil, e no valor máximo

Para uma distribuição simétrica ou aproximadamente simétrica, deveríamos esperar que:

- a) $Q_2 - x_{(1)} \approx x_{(n)} - Q_2$
- b) $Q_2 - Q_1 \approx Q_3 - Q_2$
- c) $Q_1 - x_{(1)} \approx x_{(n)} - Q_3$
- d) Distâncias entre mediana e Q_1 , Q_3 menores do que distâncias entre os extremos e Q_1 , Q_3

A diferença $Q_2 - x_{(1)}$ é chamada **dispersão inferior**, e $x_{(n)} - Q_2$ é a **dispersão superior**.

A condição a nos diz que as duas dispersões devem ser aproximadamente iguais para uma distribuição aproximadamente simétrica.

Para os valores

```
[1] 10 11 12 12 15 16 17 20 21 23 25 25 28 30
```

o resumo dos cinco números é

x(1)	Q1	Q2	Q3	x(n)
10.0	12.0	18.5	25.0	30.0

E para os valores

```
[1] 10 11 12 12 15 16 17 20 21 23 25 25 28 30 59
```

o resumo dos cinco números é

x(1)	Q1	Q2	Q3	x(n)
10.0	13.5	20.0	25.0	59.0

Usando os critérios apresentados acima, verifique a simetria dos dois conjuntos de dados.

O box plot ou **gráfico de caixa**, é uma representação gráfica do resumo dos cinco números.

Para construir um box plot:

- 1 Faça um retângulo (a caixa) com os quartis e a mediana
- 2 Calcule os **limites superior e inferior**

$$LS = Q_3 + 1,5 \cdot d_Q \quad \text{e} \quad LI = Q_1 - 1,5 \cdot d_Q$$

- 3 A partir de Q_3 , faça uma linha para cima até o ponto mais remoto *que não exceda LS*
- 4 A partir de Q_1 , faça uma linha para baixo até o ponto mais remoto *que não seja menor do que LI*

Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coeficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

Os valores compreendidos entre estes dois limites são chamados de **valores adjacentes**.

As observações que estiverem acima de LS ou abaixo de LI são representadas por pontos, e chamadas de **pontos exteriores** (que podem ou não serem considerados *outliers* ou *valores atípicos*).

O box plot dá uma ideia da **posição, dispersão, assimetria, caudas**, e dados discrepantes.

A justificativa para usar 1,5 no cálculo de LS e LI é que 99,3% da distribuição está entre estes dois extremos. Ou seja, para uma distribuição simétrica (normal), os pontos exteriores constituirão cerca de 0,7% da distribuição.

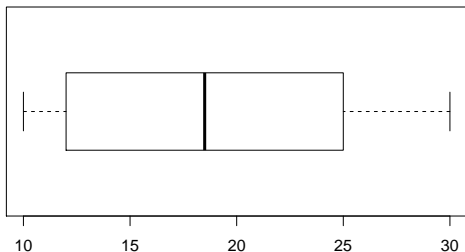
Para os valores

```
[1] 10 11 12 12 15 16 17 20 21 23 25 25 28 30
```

Com resumo dos cinco números dado por

x(1)	Q1	Q2	Q3	x(n)
10.0	12.0	18.5	25.0	30.0

O box plot correspondente é

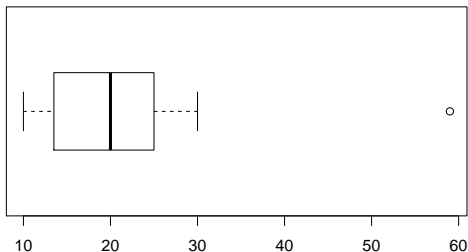


Para os valores

```
[1] 10 11 12 12 15 16 17 20 21 23 25 25 28 30 59
```

x(1)	Q1	Q2	Q3	x(n)
10.0	13.5	20.0	25.0	59.0

O box plot correspondente é



Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda
Mediana
Média

Medidas de variação

Amplitude
Desvio médio
Variância
Desvio-
padrão
Coeficiente
de Variação
Exercícios

Medidas de posição

Percentis
Quartis
Resumo dos
5 números
Box plots
Exercícios

- 1 Introdução
- 2 Medidas de tendência central
 - Moda
 - Mediana
 - Média
- 3 Medidas de variação
 - Amplitude
 - Desvio médio
 - Variância
 - Desvio-padrão
 - Coeficiente de Variação
 - Exercícios
- 4 Medidas de posição relativa
 - Percentis
 - Quartis
 - Resumo dos cinco números
 - Box plots
 - Exercícios

Exemplo: o tempo de espera, em minutos, para o atendimento em uma central telefônica, para homens e mulheres, foi registrado e está disponível abaixo

Homens: 5 2 7 9 3 4 3 1 3 8

Mulheres: 3 5 7 4 5 6 7 6 5 4

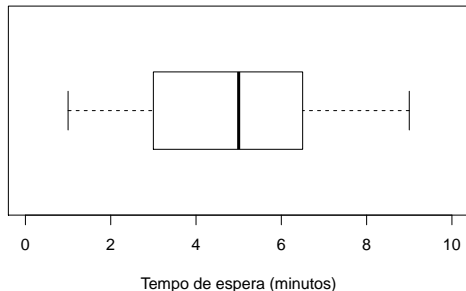
- Monte o resumo dos cinco números e o box plot para homens e mulheres **juntos**. Use algum critério para comentar sobre a simetria da distribuição.
- Monte o resumo dos cinco números e o gráfico de caixa para homens e mulheres **separados** (mas em um mesmo gráfico). Use algum critério para comentar sobre a simetria de cada distribuição.

Item a)

Resumo dos cinco números

$x(1)$	Q1	Q2	Q3	$x(n)$
1.0	3.0	5.0	6.5	9.0

Box plot



Item b)

Resumo dos cinco números

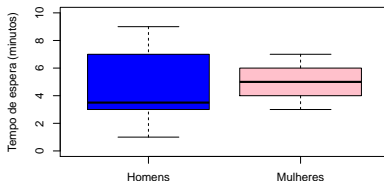
Homens

x(1)	Q1	Q2	Q3	x(n)
1.0	3.0	3.5	7.0	9.0

Mulheres

x(1)	Q1	Q2	Q3	x(n)
3	4	5	6	7

Box plot



Medidas resumo

Introdução

Medidas de centro

Moda

Mediana

Média

Medidas de variação

Amplitude

Desvio médio

Variância

Desvio-
padrão

Coefficiente
de Variação

Exercícios

Medidas de posição

Percentis

Quartis

Resumo dos
5 números

Box plots

Exercícios

- Bussab, WO; Morettin, PA. **Estatística básica**. São Paulo: Saraiva, 2006. 526 p. [Cap. 3]
- Magalhães, MN; Lima, ACP. **Noções de Probabilidade e Estatística**. São Paulo: EDUSP, 2008. [Cap. 1]