Teste de hipótese para uma população

Fernando de Pol Mayer

Laboratório de Estatística e Geoinformação (LEG)
Departamento de Estatística (DEST)
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Sumário

Plano de aula

Introdução

Na **inferência estatística** os dois principais objetivos são:

1. **Estimar** um parâmetro populacional
2. **Testar** uma hipótese ou afirmativa sobre um parâmetro populacional

Introdução

Hipótese

É uma afirmativa sobre uma propriedade da população

Teste de hipótese

É um procedimento para se testar uma afirmativa sobre uma propriedade da população

Permite tomar **decisões** sobre a população com base em informações de dados amostrais.

Plano de aula

Tipos de hipóteses

Hipótese nula H_0

É uma afirmativa de que o valor de um parâmetro populacional é **igual** a algum valor especificado. (O termo *nula* é usado para indicar nenhuma mudança, nenhum efeito). Ex.:

- $\mu = 170$ cm
- $p = 0,5$

Hipótese alternativa H_a

É uma afirmativa de que o parâmetro tem um valor, que, de alguma forma, difere da hipótese nula. Ex.:

- $\mu \neq 170$ $\quad \mu < 170$ $\quad \mu > 170$

Tipos de hipóteses

Quando fazemos um teste de hipótese, chegamos a um dos dois possíveis resultados:

- **Rejeitar** H_0: em favor da hipótese alternativa H_a
- **Não rejeitar** H_0: e conclui-se que não existem diferenças

Atenção!

- O termo **aceitar** a hipótese nula é filosoficamente incorreto, pois não se pode aceitar uma hipótese baseada apenas em evidências amostrais (mesmo em um teste de hipótese formal).
- E ainda existe um **erro** associado a todo teste de hipótese . . .

Erro do tipo I e do tipo II

Erro do tipo I: rejeitar uma hipótese nula verdadeira. A probabilidade de cometer esse erro é dada por α.

Erro do tipo II: não rejeitar uma hipótese nula falsa. A probabilidade de cometer esse erro é dada por β.

	H_o **verdadeira**	H_o **falsa**
Não rejeitar H_0	Decisão correta	Erro tipo II
Rejeitar H_0	Erro tipo I	Decisão correta

Portanto, o valor de α determina a chance de erro do teste de hipótese.

Nível de significância α

O nível de significância α é a probabilidade de cometermos um erro do tipo I.

Este valor é determinado **antes** de se iniciar o teste, e determina o nível de risco que pode ser tolerado ao se rejeitar uma hipótese nula que é verdadeira.

Valores comuns de α são 0,10; 0,05 e 0,01.

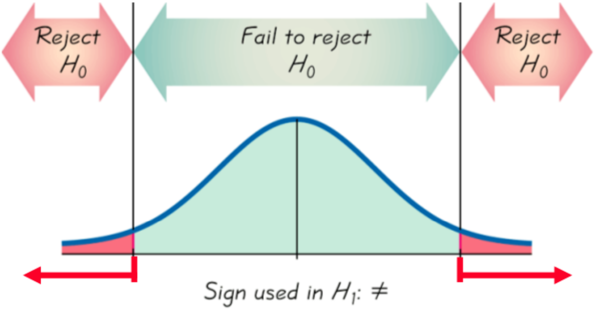
Testes unilaterais e bilaterais

Uma hipótese do tipo

$H_0 =$

$H_a \neq$

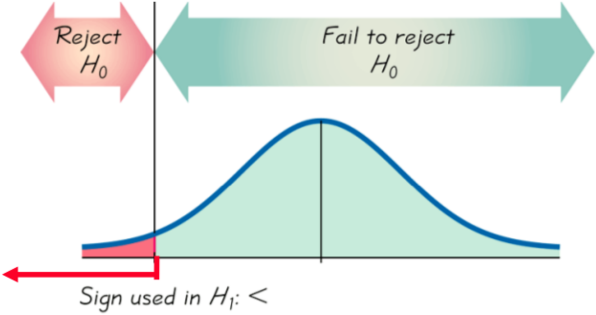
é **bilateral**



Uma hipótese do tipo

$$H_0 \geq$$
$$H_a <$$

é **unilateral à esquerda**



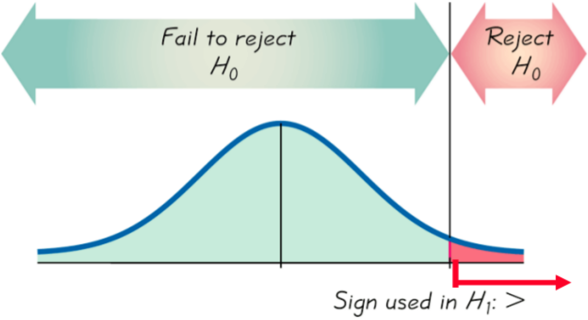
Testes unilaterais e bilaterais

Uma hipótese do tipo

$H_0 \leq$

$H_a >$

é **unilateral à direita**



Testes unilaterais e bilaterais

A **região crítica** de um teste de hipótese é a área de **rejeição** da hipótese nula

O **valor crítico** é o valor que divide a área de rejeição da área de não rejeição de H_0. Depende:

- da distribuição amostral da estimativa testada
- do valor de α

Estatística de teste

A **estatística de teste** é um valor usado para tomar a decisão sobre a hipótese nula.

É encontrada pela conversão da estatística amostral em um escore (z ou t), com a suposição de que a hipótese nula seja verdadeira.

Se:

- A estatística de teste cair **dentro** da região crítica $\rightarrow$ **rejeita** H_0
- A estatística de teste cair **fora** da região crítica $\rightarrow$ **não rejeita** H_0

Estatística de teste

Exemplo: estatística de teste para uma média com σ conhecido

$$z_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Este valor **calculado** deve ser comparado com um **valor crítico** de z_{crit}, obtido a partir da tabela da distribuição $\text{N}(0, 1)$.

Se:

- $|z_{calc}| > |z_{crit}| \rightarrow$ **rejeita** H_0
- $|z_{calc}| < |z_{crit}| \rightarrow$ **não rejeita** H_0

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a)
2. Definir um nível de **significância** α (ex.: $\alpha = 0,05$), que irá determinar o nível de **confiança** $100(1 - \alpha)\%$ do teste
3. Determinar a **região de rejeição** com base no nível de significância $\rightarrow$ valor crítico
4. Calcular a **estatística de teste**, sob a hipótese nula $\Rightarrow$ valor calculado
5. Rejeitar a hipótese nula se a estatística de teste calculada estiver dentro da região de rejeição $\Rightarrow$ $|\text{valor calculado}| > |\text{valor crítico}|$

Plano de aula

Plano de aula

Testes de hipótese para a média: σ conhecido

Quando temos os seguintes requisitos:

1. Temos uma AAS
2. σ é conhecido
3. A população tem distribuição normal ou $n > 30$

podemos usar o Teorema Central do Limite para afirmar que a média segue uma distribuição normal, e a **estatística de teste** é dada por

$$z_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

onde μ_0 é o valor de teste na hipótese nula.

Testes de hipótese para a média: σ conhecido

Procedimentos gerais para um teste de hipótese com σ conhecido

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_1)
2. Definir um nível de **significância** α (ex.: $\alpha = 0,05$), que irá determinar o nível de **confiança** $100(1 - \alpha)\%$ do teste
3. Determinar a **região de rejeição** com base no nível de significância $\rightarrow z_{crit}$
4. Calcular a **estatística de teste**, sob a hipótese nula

$$z_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

5. Rejeitar a hipótese nula se a estatística de teste calculada estiver dentro da região de rejeição ($|z_{calc}| > |z_{crit}|$)

Testes de hipótese para a média: σ conhecido

Exemplo:

Uma máquina de encher embalagens de café está funcionando adequadamente se colocar 700 g em cada embalagem.

Para verificar a calibração da máquina, uma empresa coletou uma amostra de 40 embalagens, que resultou em uma média de 698 g. Sabe-se que o desvio-padrão do enchimento da máquina é de 10 g.

Teste a hipótese de o peso médio das embalagens na população ser 700 g, com um nível de significância de 5%.

Exemplo:

Uma máquina de encher embalagens de café está funcionando adequadamente se colocar 700 g em cada embalagem.

Para verificar a calibração da máquina, uma empresa coletou uma amostra de 40 embalagens, que resultou em uma média de 698 g. Sabe-se que o desvio-padrão do enchimento da máquina é de 10 g.

Teste a hipótese de o peso médio das embalagens na população ser 700 g, com um nível de significância de 5%.

```
$`valor critico`
[1] -1.96  1.96

$`estatistica de teste`
[1] -1.2649

$decisao
[1] "nao rejeita H0"
```

Exemplo:

Um fabricante de lajotas introduz um novo material em sua fabricação e acredita que aumentará a resistência média, que é de 206 kg.

A resistência das lajotas tem distribuição normal com desvio-padrão de 12 kg. Retirou-se uma amostra de 30 lajotas, e obteve-se uma média amostral de 210 kg.

Ao nível de 10%, o fabricante pode afirmar que a resistência média de suas lajotas aumentou?

Testes de hipótese para a média: σ conhecido

Exemplo:

Um fabricante de lajotas introduz um novo material em sua fabricação e acredita que aumentará a resistência média, que é de 206 kg.

A resistência das lajotas tem distribuição normal com desvio-padrão de 12 kg. Retirou-se uma amostra de 30 lajotas, e obteve-se uma média amostral de 210 kg.

Ao nível de 10%, o fabricante pode afirmar que a resistência média de suas lajotas aumentou?

```
$`valor critico`
[1] 1.2816

$`estatistica de teste`
[1] 1.8257

$decisao
[1] "rejeita H0"
```

Plano de aula

Quando temos os seguintes requisitos:

1. Temos uma AAS
2. σ é **desconhecido**
3. A população tem distribuição normal ou $n > 30$

usamos a distribuição t como **estatística de teste**, dada por

$$t_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

com $n - 1$ **graus de liberdade**, e onde μ_0 é o valor de teste na hipótese nula.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese com σ desconhecido

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_1)
2. Definir um nível de **significância** α (ex.: $\alpha = 0,05$), que irá determinar o nível de **confiança** $100(1 - \alpha)\%$ do teste
3. Determinar a **região de rejeição** com base no nível de significância $\to t_{crit}$ (com $gl = n - 1$)
4. Calcular a **estatística de teste**, sob a hipótese nula

$$t_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

5. Rejeitar a hipótese nula se a estatística de teste calculada estiver dentro da região de rejeição ($|t_{calc}| > |t_{crit}|$)

Exemplo:

A vida média das lâmpadas produzidas por uma empresa era de 1120 horas.

Uma amostra de 8 lâmpadas extraída recentemente apresentou a vida média de 1070 horas, com desvio-padrão de 125 horas, e distribuição próxima da normal.

Testar a hipótese de que a vida média das lâmpadas não tenha se alterado, ao nível de 1% de significância.

Exemplo:

A vida média das lâmpadas produzidas por uma empresa era de 1120 horas.

Uma amostra de 8 lâmpadas extraída recentemente apresentou a vida média de 1070 horas, com desvio-padrão de 125 horas, e distribuição próxima da normal.

Testar a hipótese de que a vida média das lâmpadas não tenha se alterado, ao nível de 1% de significância.

```
$`valor critico`
[1] -3.4995  3.4995

$`estatistica de teste`
[1] -1.1314

$decisao
[1] "nao rejeita H0"
```

Exemplo:

Querendo determinar a quantidade média de nicotina dos cigarros, uma empresa retirou uma amostra de 25 cigarros e obteve os seguintes resultados:

$$\bar{x} = 38\,\text{mg} \qquad s^2 = 0,25\,\text{mg}^2$$

Ao nível de 5%, teste se a quantidade média de nicotina pode ser considerada inferior a 40 mg.

Exemplo:

Querendo determinar a quantidade média de nicotina dos cigarros, uma empresa retirou uma amostra de 25 cigarros e obteve os seguintes resultados:

$$\bar{x} = 38\,\text{mg} \qquad s^2 = 0,25\,\text{mg}^2$$

Ao nível de 5%, teste se a quantidade média de nicotina pode ser considerada inferior a 40 mg.

```
$`valor critico`
[1] -1.7109

$`estatistica de teste`
[1] -20

$decisao
[1] "rejeita H0"
```

Exemplo:

Uma máquina é projetada para fazer esferas de aço de 1 cm de raio. Uma amostra de 10 esferas é produzida, e tem raio médio de 1,004 cm, com $s = 0,003$.

Há razões para suspeitar que a máquina esteja produzindo esferas com raio maior que 1 cm? (Use um nível de significância de 10%).

Exemplo:

Uma máquina é projetada para fazer esferas de aço de 1 cm de raio. Uma amostra de 10 esferas é produzida, e tem raio médio de 1,004 cm, com $s = 0,003$.

Há razões para suspeitar que a máquina esteja produzindo esferas com raio maior que 1 cm? (Use um nível de significância de 10%).

```
$`valor critico`
[1] 1.383

$`estatistica de teste`
[1] 4.2164

$decisao
[1] "rejeita H0"
```

Plano de aula

Testes de hipótese para a proporção p

A proporção amostral

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{número de sucessos}}{\text{total de tentativas}}$$

é a **melhor estimativa** para a proporção populacional π

Já vimos que quando ambas condições são satisfeitas

- $np \geq 5$
- $n(1-p) \geq 5$

a distribuição binomial das proporções amostrais pode ser **aproximada** por uma distribuição normal com com média $\mu = np$ e desvio-padrão $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Testes de hipótese para a proporção p

Quando temos os seguintes requisitos:

1. Temos uma AAS
2. As condições para a distribuição binomial são satisfeitas
   - as tentativas são independentes
   - há duas categorias de resultado ("sucesso", "fracasso")
   - a probabilidade de sucesso p permanece constante
3. $np_0 \geq 5$ e $n(1 - p_0) \geq 5$

podemos usar a distribuição normal como aproximação da binomial, e portanto, usamos a **estatística de teste**

$$z_{calc} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

onde p_0 é o valor de proporção de teste na hiótese nula.

Procedimentos gerais para a construção de um teste de hipótese para a proporção p

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_1)
2. Determine o valor de $\hat{p} = \frac{x}{n}$
3. Verifique se $np_0 \geq 5$ e $n(1 - p_0) \geq 5$
4. Definir um nível de **significância** α (ex.: $\alpha = 0,05$), que irá determinar o nível de **confiança** $100(1 - \alpha)\%$ do teste
5. Determinar a **região de rejeição** com base no nível de significância $\rightarrow z_{crit}$
6. Calcular a **estatística de teste**, sob a hipótese nula

$$z_{calc} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

7. Rejeitar a hipótese nula se a estatística de teste calculada estiver dentro da região de rejeição ($|z_{calc}| > |z_{crit}|$)

Testes de hipótese para a proporção p

Exemplo:

Uma empresa desenvolveu um método de seleção de gênero, e afirma que, com a utilização deste método, a proporção de nascer uma menina é maior do que 50%. Para pais que utilizaram o método, dos 726 bebês nascidos, 668 eram meninas.

Use este resultado, com um nível de significância de 5%, para testar a afirmativa de que, entre bebês nascidos de casais que utilizaram o método, a proporção de meninas é maior do que 50% (que seria o valor esperado sem qualquer tratamento).

Exemplo:

Uma empresa desenvolveu um método de seleção de gênero, e afirma que, com a utilização deste método, a proporção de nascer uma menina é maior do que 50%. Para pais que utilizaram o método, dos 726 bebês nascidos, 668 eram meninas.

Use este resultado, com um nível de significância de 5%, para testar a afirmativa de que, entre bebês nascidos de casais que utilizaram o método, a proporção de meninas é maior do que 50% (que seria o valor esperado sem qualquer tratamento).

```
$`valor critico`
[1] 1.6449

$`estatistica de teste`
[1] 22.639

$decisao
[1] "rejeita H0"
```

Testes de hipótese para a proporção p

Exemplo:

Um candidato a deputado estadual afirma que terá 60% dos votos dos eleitores de uma cidade. Um instituto de pesquisa colhe uma amostra de 300 eleitores dessa cidade, encontrando 160 que votarão no candidato. Esse resultado mostra que a afirmação do candidato é verdadeira? (Use um nível de significância de 5%).

Testes de hipótese para a proporção p

Exemplo:

Um candidato a deputado estadual afirma que terá 60% dos votos dos eleitores de uma cidade. Um instituto de pesquisa colhe uma amostra de 300 eleitores dessa cidade, encontrando 160 que votarão no candidato. Esse resultado mostra que a afirmação do candidato é verdadeira? (Use um nível de significância de 5%).

```
$`valor critico`
[1] -1.96  1.96

$`estatistica de teste`
[1] -2.357

$decisao
[1] "rejeita H0"
```

Plano de aula

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. **Estatística básica**. São Paulo: Saraiva, 2006. [Cap. 12]
- Magalhães, MN; Lima, ACP. **Noções de Probabilidade e Estatística**. São Paulo: EDUSP, 2008. [Cap. 8]
- Montgomery, DC; Runger, GC. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2012. [Cap. 9]