# Análise de Séries Temporais

Fernando Lucambio

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Novembro, 2020

O objetivo principal da análise de séries temporais é desenvolver modelos matemáticos que forneçam descrições plausíveis para dados amostrais, como os encontrados anteriormente. A fim de fornecer um cenário estatístico para descrever o caráter de dados que aparentemente flutuam de maneira aleatória ao longo do tempo, assumimos que uma série temporal pode ser definida como uma coleção de variáveis aleatórias indexadas de acordo com a ordem em que são obtidos no tempo.

Assim, podemos considerar uma série temporal como uma sequência de variáveis aleatórias $X_1, X_2, X_3, \cdots$ , onde a variável aleatória $X_1$ denota o valor tomado pela série no primeiro ponto de tempo, a variável $X_2$ denota o valor para o segundo período de tempo, $X_3$ denota o valor para o terceiro período de tempo e assim por diante.

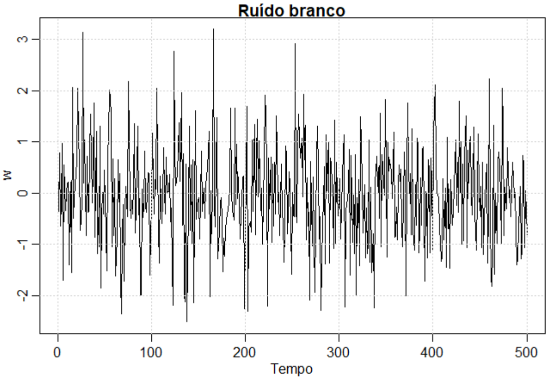
Em geral, uma coleção de variáveis aleatórias $\{X_t\}$, indexadas por $t$ é referida como um processo estocástico, $t$ será tipicamente discreto e variará sobre os inteiros $t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ ou algum subconjunto dos inteiros. Os valores observados de um processo estocástico são referidos como uma realização do processo estocástico.

Como ficará claro no contexto de nossas discussões, usamos o termo série temporal se estamos nos referindo genericamente ao processo ou a uma realização particular e não fazemos nenhuma distinção notacional entre os dois conceitos.

É convencional exibir uma série temporal amostral graficamente, plotando os valores das variáveis aleatórias no eixo vertical ou ordenadas, com a escala de tempo como a abscissa.

## Exemplo I.8. Ruído branco

É uma coleção de variáveis aleatórias não correlacionadas $W_t$, com média 0 e variância finita $\sigma_w^2$. A série temporal gerada a partir de variáveis não correlacionadas é usada como modelo para o ruído, onde é chamado ruído branco.



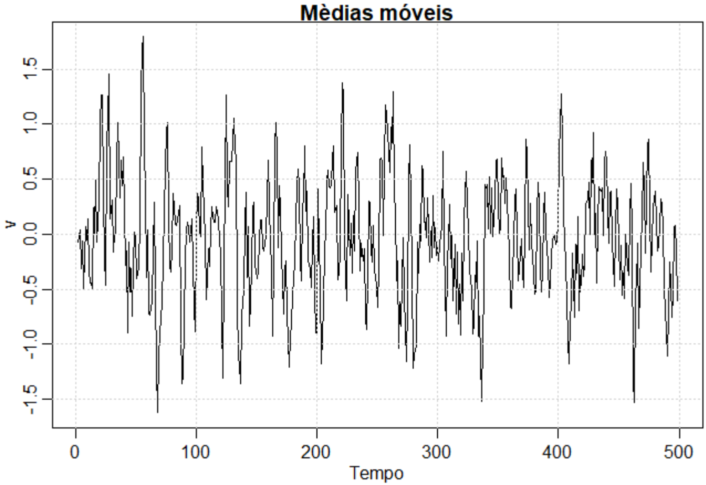
## Exemplo I.9. Médias Móveis

Podemos substituir a série de ruído branco por uma média móvel que suaviza a série. Por exemplo, considere a substituição de $W_t$ no Exemplo I.8 por uma média de seu valor atual e seus vizinhos imediatos no passado e no futuro. Isto é,

$$V_t = \frac{1}{3}\Big(W_{t-1} + W_t + W_{t+1}\Big),$$

que leva à série mostrada na figura logo abaixo.

Inspecionar a série mostra uma versão mais suave da primeira série, refletindo o fato de que as oscilações mais lentas são mais aparentes e algumas das oscilações mais rápidas são removidas. Começamos a notar uma semelhança com o SOI no Exemplo I.5.


Mèdias móveis
v
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
0
100
200
300
400
500
Tempo

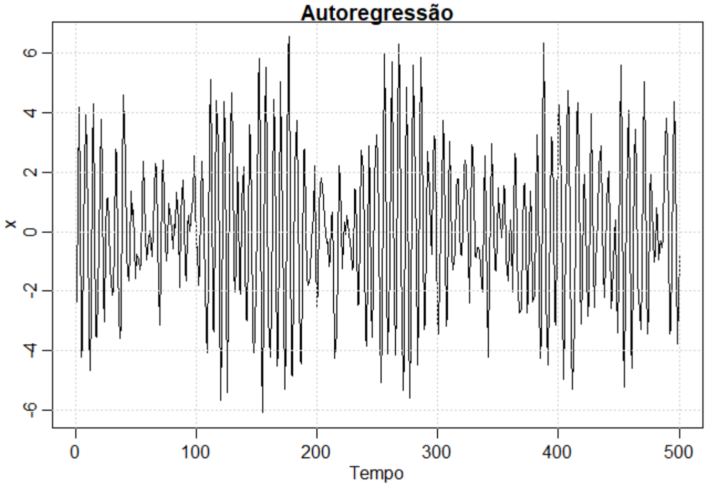
## Exemplo I.10. Autoregressões

Suponha que consideremos a série de ruído branco do Exemplo I.8 como entrada e calculemos a saída usando a equação de segunda ordem

$$X_t = X_{t-1} - 0.9X_{t-2} + W_t,$$

sucessivamente para $t = 1, 2, \cdots, 500$.

Esta equação representa uma regressão ou predição do valor atual $X_t$ de uma série temporal como uma função dos dois últimos valores da série e, portanto, o termo autoregressão é sugerido como modelo. Existe um problema com os valores de inicialização porque a equação acima também depende das condições iniciais $X_0$ e $X_1$, mas assumindo que temos esses valores, geramos os valores sucessivos por substituição.


Autoregressão
x
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
100
200
300
400
500
Tempo

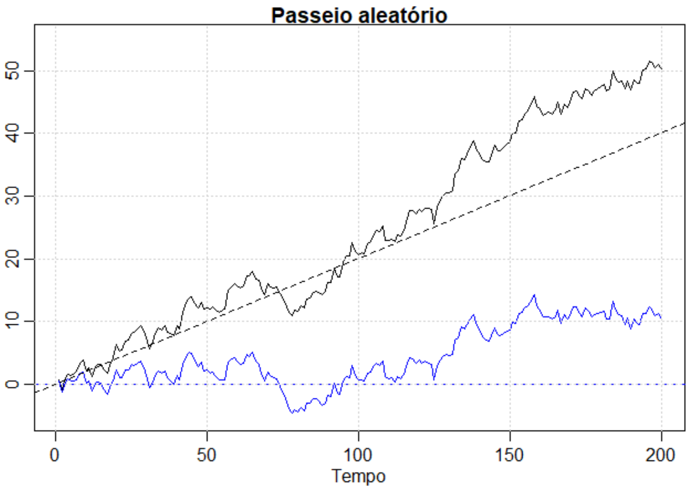
## Exemplo I.11. Passeio aleatório com tendência.

Um modelo para analisar a tendência, como visto nos dados de temperatura global no Exemplo I.2, é o passeio aleatório com modelo de tendência dado por

$$X_t = \delta + X_{t-1} + W_t,$$

para $t = 1, 2, \cdots$, com condição inicial $X_0 = 0$ e onde $W_t$ é ruído branco. A constante $\delta$ é chamada de tendência e quando $\delta = 0$ o modelo acima é chamado simplesmente de um passeio aleatório.

O termo passeio aleatório vem do fato de que, quando $\delta = 0$, o valor da série temporal no tempo $t$ é o valor da série no tempo $t-1$ mais um movimento completamente aleatório determinado por $W_t$.


Passeio aleatório
0
10
20
30
40
50
0
50
100
150
200
Tempo

## Exemplo I.12. Sinal no ruído.

Muitos modelos realistas para gerar séries temporais assumem um sinal subjacente com alguma variação periódica consistente, contaminada pela adição de um ruído aleatório.
Considere o modelo

$$X_t = 2\cos\big(2\pi(t+15)/50\big) + W_t,$$

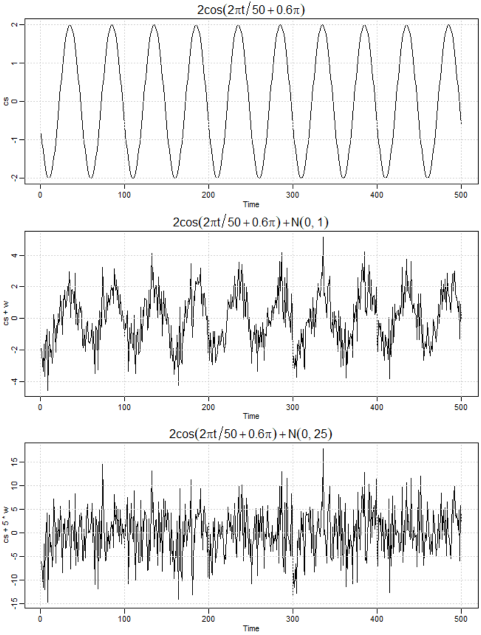
para $t = 1, 2, \cdots, 500$ onde o primeiro termo é considerado como o sinal, mostrado no painel superior da figura abaixo. Notamos que uma forma de onda sinusoidal pode ser escrita como

$$A\cos\big(2\pi\omega t + \phi\big),$$

onde $A$ é a amplitude, $\omega$ a frequência de oscilação e $\phi$ é uma mudança de fase. Na expressão acima $A = 2$, $\omega = 1/50$, ou seja, um ciclo a cada 50 pontos no tempo e $\phi = 2\pi 15/50 = 0.6\pi$.

## Exemplo I.12. Sinal no ruído (continuação)

Um termo de ruído aditivo foi considerado ruído branco com $\sigma_w = 1$, isso no painel central e $\sigma_w = 5$ no painel inferior, retirado de uma distribuição normal. Adicionando os dois juntos obscurece o sinal, como mostrado nos painéis inferiores da figura abaixo. Naturalmente, o grau em que o sinal é obscurecido depende da amplitude do sinal e do tamanho de $\sigma_w$. A razão da amplitude do sinal para $\sigma_w$ ou alguma função de razão é às vezes chamado de relação sinal-ruído (SNR); quanto maior o SNR, mais fácil é detectar o sinal. Observe que o sinal é facilmente discernível no painel central da figura, enquanto o sinal é obscurecido no painel inferior. Normalmente, não observaremos o sinal, mas o sinal obscurecido pelo ruído.


$2\cos(2\pi t/50 + 0.6\pi)$
cs
Time
$2\cos(2\pi t/50 + 0.6\pi) + N(0, 1)$
cs + w
Time
$2\cos(2\pi t/50 + 0.6\pi) + N(0, 25)$
cs + 5 * w
Time

Uma descrição completa de uma série temporal, considerada como uma coleção de $n$ variáveis aleatórias em pontos de tempo inteiros arbitrários $t_1, t_2, \cdots, t_n$, para qualquer inteiro positivo $n$, é fornecida pela função de distribuição conjunta, avaliada como a probabilidade de que os valores das séries sejam juntos menores que as n constantes, $c_1, c_2, \cdots, c_n$; ou seja,

$$F(c_1, c_2, \cdots, c_n) = P(X_{t_1} \leq c_1, X_{t_2} \leq c_2, \cdots, X_{t_n} \leq c_n)\cdot$$

Infelizmente, a função de distribuição multidimensional geralmente não pode ser escrita facilmente, a menos que as variáveis aleatórias sejam conjuntamente normais, caso em que a densidade conjunta tem forma bem conhecida.

## Definição I.1

A função de média é definida como

$$\mu_{X_t} = \mathrm{E}(X_t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_t(x)\mathrm{d}x,$$

desde que exista, onde E denota o operador usual de esperança ou valor esperado.

## Exemplo I.13. Função média de uma série de médias móveis.

Caso $W_t$ denote uma série de médias móveis, $\mu_{W_t} = \mathrm{E}(W_t) = 0$ para todo $t$. Suavizar a série não altera a média porque podemos escrever

$$\mu_{V_t} = \mathrm{E}(V_t) = \frac{1}{3}\Big(\mathrm{E}(W_{t-1}) + \mathrm{E}(W_t) + \mathrm{E}(W_{t+1})\Big) \; = \; 0 \cdot$$

A falta de independência entre dois valores adjacentes $X_s$ e $X_t$ pode ser avaliada numericamente, como na estatística clássica, usando as noções de covariância e correlação. Assumindo que a variância de $X_t$ é finita, temos a seguinte definição.

### Definição I.2

A função de autocovariância é definida como o segundo momento do produto

$$\gamma_X(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathrm{E}\big((X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)\big),$$

para todos os $s$ e $t$. Quando não existe confusão possível sobre a série temporal à qual estamos nos referindo, descartamos o índice e escrevemos $\gamma_X(s,t)$ como $\gamma(s,t)$.

A autocovariancia mede a dependência linear entre dois pontos na mesma série observada em diferentes momentos. Séries muito suaves exibem funções de autocovariância que permanecem grandes mesmo quando $t$ e $s$ estão distantes, enquanto que as séries agitadas tendem a ter funções de autocovariância que são quase zero para grandes separações. Lembre-se de estatísticas clássicas que se $\gamma_X(s,t) = 0$, $X_s$ e $X_t$ não estão linearmente relacionados, mas ainda pode haver alguma estrutura de dependência entre eles. Se, no entanto, $X_s$ e $X_t$ são normais bivariados, $\gamma_X(s,t) = 0$ garante sua independência. É claro que, para $s = t$, a autocovariância se reduz à variância, suposta finita, porque

$$\gamma_X(s,t) = \mathrm{E}\big((X_t - \mu_t)^2\big) = \mathrm{Var}(X_t)\cdot$$

## Exemplo I.16. Autocovariância do ruído branco

A série de ruído branco $W_t$ satisfaz que $E(W_t) = 0$ e

$$\gamma_W(s,t) = \mathrm{Cov}(W_s, W_t) = \begin{cases} \sigma_W^2, & s = t \\ 0, & s \neq t \end{cases}.$$

Uma realização de ruído branco é mostrada da Figura I.8.

Um resultado útil: se as variáveis aleatórias $U = \sum_{j=1}^m a_j X_j$ e $V = \sum_{k=1}^r b_k Y_k$, são combinações lineares das variáveis aleatórias $\{X_j\}$ e $\{Y_k\}$, todas de variâncias finitas, respectivamente, então

$$\mathrm{Cov}(U,V) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r a_j b_k \mathrm{Cov}(X_j, Y_k)\cdot$$

Além disso, $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Cov}(U,U)$.

## Exemplo I.17. Autocovariância de um modelo de médias móveis

Considere aplicar um modelo de médias móveis de três pontos à série de ruído branco do exemplo anterior, como no Exemplo I.9. Nesse caso,

$$\begin{aligned}\gamma_v(s,t) &= \mathrm{Cov}(V_s, V_t) \\ &= \mathrm{Cov}\Big(\tfrac{1}{3}(W_{s-1}+W_s+W_{s+1}), \tfrac{1}{3}(W_{t-1}+W_t+W_{t+1})\Big)\cdot\end{aligned}$$

Resumimos os valores para todos os $s$ e $t$ como

$$\gamma_v(s,t) = \begin{cases} \frac{3}{9}\sigma_W^2, & \textit{quando} \quad s=t \\ \frac{2}{9}\sigma_W^2, & \textit{quando} \quad |s-t|=1 \\ \frac{1}{9}\sigma_W^2, & \textit{quando} \quad |s-t|=2 \\ 0, & \textit{quando} \quad |s-t|>2 \end{cases}$$

## Exemplo I.18. Autocovariância de um passeio aleatório

Para o modelo de passeio aleatório $X_t = \sum_{j=1}^{t} W_j$, temos que

$$\gamma_X(s,t) \, = \, \mathrm{Cov}(X_s, X_t) \, = \, \mathrm{Cov}\Big(\sum_{j=1}^{s} W_j, \sum_{k=1}^{t} W_k\Big) \, = \, \min\{s,t\}\sigma_W^2,$$

porque os $W_t$ são variáveis aleatórias não correlacionadas.

A função de autocovariância de uma caminhada aleatória depende dos valores de tempo específicos $s$ e $t$ e não da separação de tempo ou atraso. Além disso, a variância $\mathrm{Var}(X_t) = \gamma_X(t,t) = t\sigma_W^2$, aumenta sem limite à medida que o tempo $t$ aumenta. O efeito desse aumento de variância pode ser visto na figura no Exemplo I.11, onde os processos começam a se afastar de suas funções médias $\delta t$, note que $\delta = 0$ e $\delta = 0.2$ nesse exemplo.

**Definição I.3. A função de autocorrelação (ACF).**

A função de autocorrelação (ACF) é definida como

$$\rho(s,t) = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\gamma(s,s)\gamma(t,t)}}.$$

O função de autocorrelação mede a previsibilidade linear da série no tempo $t$, digamos $X_t$, usando apenas o valor $X_s$. Podemos mostrar que $-1 < \rho(s,t) < 1$ usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Se podemos prever $X_t$ perfeitamente de $X_s$ através de uma relação linear, $X_t = \beta_0 + \beta_1 X_s$; então a correlação será +1 quando $\beta_1 > 0$ e -1 quando $\beta_1 < 0$. Portanto, temos uma medida aproximada da capacidade de prever a série no tempo $t$ do seu valor no tempo $s$.

## Definição I.4. A função de covariância cruzada.

A função de covariância cruzada entre duas séries $X_t$ e $Y_t$ é dada por

$$\gamma_{XY}(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, Y_t) = \mathrm{E}\Big( (X_s - \mu_{X_s})(Y_t - \mu_{Y_t}) \Big).$$

## Definição I.5. A função de correlação cruzada (CCF).

A função de correlação cruzada (CCF) é definida como

$$\rho_{XY}(s,t) = \frac{\gamma_{XY}(s,t)}{\sqrt{\gamma_X(s,s)\gamma_Y(t,t)}}.$$

Embora não tenhamos feito nenhuma suposição especial sobre o comportamento da série temporal, muitos dos exemplos anteriores sugeriram que um tipo de regularidade pode existir ao longo do tempo no comportamento de uma série temporal.

### Definição I.6. Série estritamente estacionária.

Uma série temporal estritamente estacionária é aquela para a qual o comportamento probabilístico de cada coleção de valores $X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_k}$ é idêntico ao do conjunto de deslocamentos temporais $X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \cdots, X_{t_k+h}$, para todos $k = 1, 2, \cdots$, todos os instantes de tempo $t_1, t_2, \cdots, t_k$, todos os números $c_1, c_2, \cdots, c_k$ e todos os deslocamentos de tempo $h = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

É difícil avaliar a estacionariedade estrita de um único conjunto de dados. Em vez de impor condições em todas as distribuições possíveis de uma série temporal, usaremos uma versão mais branda que impõe condições apenas nos dois primeiros momentos da série. Agora temos a seguinte definição.

### Definição I.7. Série fracamente estacionária.

Uma série temporal fracamente estacionária é um processo de variância finita tal que:

(i) a função de média $\mu_t$, é constante e não depende do tempo $t$, e

(ii) a função de autocovariância $\gamma(s,t)$, depende de $s$ e $t$ somente através de sua diferença $|s-t|$.

Doravante, usaremos o termo estacionário para significar fracamente estacionário. Se um processo estiver estacionário no sentido estrito, usaremos o termo estritamente estacionário.

A estacionariedade exige regularidade nas funções de média e de autocorrelação para que essas quantidades, pelo menos, possam ser estimadas pela média. Uma série temporal estritamente estacionária, com variância finita, também é estacionária. O contrário não é verdade a menos que haja outras condições. Um caso importante em que a estacionariedade estrita implica estacionariedade é se a série temporal é Gaussiana, significando que todas as distribuições finitas das séries são Gaussianas.

Devido a que a função de média $\mathrm{E}(X_t) = \mu_t$ de uma série temporal estacionária $X_t$ depende de $s$ e $t$ somente através de sua diferença $|s-t|$, podemos simplificar a notação. Seja $s = t+h$, onde $h$ representa o deslocamento de tempo ou atraso. Então

$$\gamma(t+h,t) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \mathrm{Cov}(X_h, X_t) = \gamma(h,0),$$

porque a diferença de tempo entre os instantes t+h e t é a mesma que a diferença de tempo entre os instantes $h$ e 0.

Assim, a função de autocovariância de uma série temporal estacionária não depende do argumento de tempo $t$. Por conveniência, abandonaremos o segundo argumento de $\gamma(h, 0)$.

**Definição I.8. A função de autocovariância estacionária.**

A função de autocovariância de uma série estacionária é

$$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \mathrm{E}\big((X_{t+h} - \mu)(X_t - \mu)\big)\cdot$$

**Definição I.9. A função de autocorrelação estacionária.**

A função de autocorrelação de uma série estacionária é

$$\rho(h) = \frac{\gamma(t+h, t)}{\sqrt{\gamma(t+h, t+h)\gamma(t, t)}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $-1 \leq \rho(h) \leq 1 \; \forall h$, permitindo avaliar a importância relativa num determinado valor de autocorrelação comparando com os valores extremos -1 e 1.

### Exemplo I.19. Estacionaridade do ruído branco

As funções de média e autocovariância das séries de ruído branco são $\mu_{W_t} = 0$ e

$$\gamma_W(h) = \text{Cov}(W_{t+h}, W_t) = \begin{cases} \sigma_W^2, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases} .$$

Assim, o ruído branco satisfaz as condições da Definição I.7 e é fracamente estacionária ou estacionária. Se as variações do ruído branco também são normalmente distribuídas, a série também é estritamente estacionária. A função de autocorrelação é dada por $\rho_W(0) = 1$ e $\rho(h) = 0$, para $h \neq 0$.

## Exemplo I.20. Estacionaridade da média móvel

O processo de média móvel de três pontos do Exemplo I.9 é estacionário porque, do Exemplo I.13 e Exemplo I.17, as funções de média e autocovariância são $\mu_{v_t} = 0$ e

$$\gamma_v(h) = \begin{cases} \frac{3}{9}\sigma_w^2, & h = 0 \\ \frac{2}{9}\sigma_w^2, & h = \pm 1 \\ \frac{1}{9}\sigma_w^2, & h = \pm 2 \\ 0, & |h| > 2 \end{cases},$$

são independentes do tempo $t$, satisfazendo as condições da Definição I.7.

### Exemplo I.21. Um passeio aleatório não é estacionário

Um passeio aleatório não é estacionário porque sua função de autocovariância é $\gamma(s,t) = \min\{s,t\}\sigma_w^2$, depende do tempo.

### Exemplo I.22. Estacionariedade de tendência

Por exemplo, se $X_t = \alpha + \beta t + Y_t$, onde $Y_t$, onde $Y_t$ é estacionário, então a função de média é $\mu_{X_t} = \mathrm{E}(X_t) = \alpha + \beta t + \mu_Y$, que não é independente do tempo. Portanto, o processo não é estacionário. A função de autocovariância, no entanto, é independente do tempo. Assim, o modelo pode ser considerado como tendo comportamento estacionário em torno de uma tendência linear; esse comportamento é às vezes chamado de estacionariedade de tendência. Um exemplo de tal processo é o preço das séries de frango exibido na figura do Exemplo II.1.

Mais uma vez, temos o resultado $-1 \leq \rho_{XY}(h) \leq 1$, que permite a comparação com os valores extremos -1 e 1, quando olhamos para a relação entre $X_{t+h}$ e $Y_t$.

A função de correlação cruzada geralmente não é simétrica em torno de zero, isto é, tipicamente $\rho_{XY}(h) \neq \rho_{XY}(-h)$.

Esse é um conceito importante; deve ficar claro que $\text{Cov}(X_2, Y_1)$ e $\text{Cov}(X_1, Y_2)$ não precisam ser iguais. É o caso, no entanto, que

$$\rho_{XY}(h) = \rho_{XY}(-h)\cdot$$

### Exemplo I.23. Estacionariedade conjunta.

Consideremos duas séries $X_t$ e $Y_t$, formadas a partir da soma e diferença de dois valores sucessivos de um processo de ruído branco, digamos,

$$X_t = W_t + W_{t-1} \qquad \text{e} \qquad Y_t = W_t - W_{t-1},$$

onde $W_t$ são variáveis aleatórias independentes com média zero e variância $\sigma_W^2$. Pode-se mostrar que $\gamma_X(0) = \gamma_Y(0) = 2\sigma_W^2$ e que $\gamma_X(1) = \gamma_X(-1) = \sigma_W^2$, $\gamma_Y(1) = \gamma_Y(-1) = -\sigma_W^2$.

Também

$$\gamma_{XY}(1) = \mathrm{Cov}(X_{t+1}, Y_t) = \mathrm{Cov}(W_{t+1} + W_t, W_t - W_{t-1}) = \sigma_W^2,$$

porque apenas um termo é diferente de zero.

## Exemplo I.23. Estacionariedade conjunta (continuação).

Similarmente, $\gamma_{XY}(0) = 0$, $\gamma_{XY}(-1) = -\sigma_W^2$. Obtemos que

$$\rho_{XY}(h) = \begin{cases} 0, & h = 0, \\ \frac{1}{2}, & h = 1, \\ -\frac{1}{2}, & h = -1, \\ 0, & |h| \geq 2, \end{cases} .$$

Claramente, as funções de autocovariância e de covariância cruzada dependem apenas da separação por atraso ou lag $h$, de modo que as séries são conjuntamente estacionárias.

Na situação usual com apenas uma realização, a suposição de estacionariedade se torna crítica. De alguma forma, devemos usar médias sobre essa única realização para estimar as médias populacionais e as funções de covariância.

**Definição I.14. A função de autocovariância amostral.**

A função de autocovariância amostral é definida como

$$\widehat{\gamma}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h} \left(x_{t+h} - \overline{x}\right)\left(x_t - \overline{x}\right),$$

com $\widehat{\gamma}(-h) = \widehat{\gamma}(h)$, para $h = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

**Definição I.15. A função de autocorrelação amostral.**

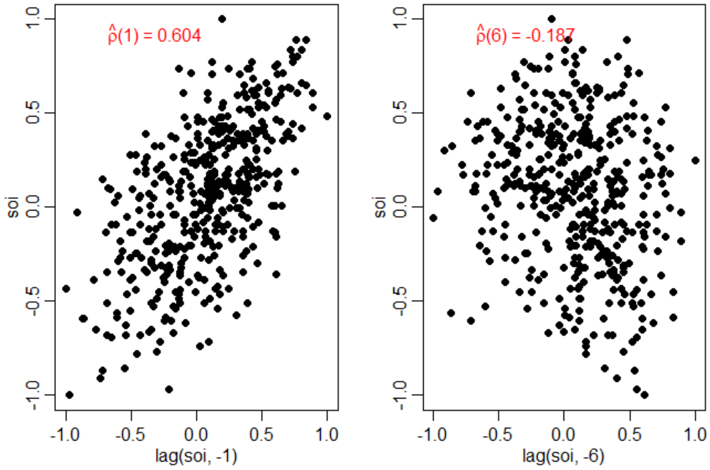
A função de autocorrelação amostral é definida como

$$\widehat{\rho}(h) = \frac{\widehat{\gamma}(h)}{\widehat{\gamma}(0)}.$$

Esta função tem uma distribuição amostral que nos permite avaliar se os dados provêm de uma série completamente aleatória ou branca ou se as correlações são estatisticamente significativas em algumas defasagens.

### Exemplo I.25. Função de autocorrelação amostral (ACF).

Estimar a autocorrelação é semelhante à estimativa de correlação na configuração usual, onde temos pares de observações $(x_i, y_i)$, para $i = 1, 2, \cdots, n$. Por exemplo, se tivermos dados de séries temporais $x_t$ para $t = 1, 2, \cdots, n$, então os pares de observações para estimação de $\rho(h)$ são os $n-h$ pares de dados $\{(x_t, x_{t+h})\}_{t=1}^{n-h}$. A figura abaixo mostra um exemplo usando a série SOI, onde $\widehat{\rho}(1) = 0.604$ e $\widehat{\rho}(6) = -0.187$.



$\hat{\rho}(1) = 0.604$
soi
lag(soi, -1)
$\hat{\rho}(6) = -0.187$
soi
lag(soi, -6)

Os seguintes códigos foram utilizados para gerar a figura.

```
> # primeiros 6 valores da ACF amostral
> r = round(acf(soi, 6, plot=FALSE)$acf[-1], 3)
> r
[1]  0.604  0.374  0.214  0.050 -0.107 -0.187
> par(mfrow=c(1,2), pch=19)
> par(mfrow=c(1,2), mar=c(4,3,1,1),mgp=c(1.6,.6,0), pch=19)
> plot(lag(soi,-1), soi); legend('topleft', bty="n", text.col="red",
      legend=substitute(paste(hat(rho),"(1) = ", p), list(p=r[1])))
> plot(lag(soi,-6), soi); legend('topleft', bty="n", text.col="red",
      legend=substitute(paste(hat(rho),"(6) = ", p), list(p=r[6])))
```

### Proposição I.2. Distribuição em Amostras Grandes.

Sob condições gerais, se $X_t$ é ruído branco, então para $n$ grande, a função de autocorrelação amostral $\widehat{\rho}(h)$, para $h = 1, 2, \cdots, H$, onde $H$ é fixo mas arbitrário, é aproximadamente normalmente distribuído com média zero e desvio padrão dado por

$$\sigma_{\widehat{\rho}(h)} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Com base no resultado anterior, obtemos um método aproximado de avaliar se os picos em $\widehat{\rho}(h)$ são significativos, determinando se o pico observado está fora do intervalo $\pm 2/\sqrt{n}$ ou mais/menos dois erros padrão. Para uma sequência de ruído branco, $\approx$ 95% da função de autocorrelação amostral deve estar dentro desses limites