Análise de Séries Temporais

Fernando Lucambio

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Novembro, 2020

A regressão clássica é frequentemente insuficiente para explicar toda a dinâmica interessante de uma série temporal. Em vez disso, a introdução de correlação que pode ser gerada através de relações lineares defasadas leva a propor os modelos autoregressivos (AR) e os modelos de média móvel autorregressivos (ARMA), apresentados em Whittle (1951).

A adição de modelos não estacionários à mistura leva ao modelo de média móvel integrado autorregressivo (ARIMA), popularizado no trabalho de referência de Box e Jenkins (1970). O método Box-Jenkins para identificar os modelos ARIMA é apresentado aqui, juntamente com técnicas de estimação e previsão de parâmetros para esses modelos.

Os modelos autorregressivos baseiam-se na ideia de que o valor atual da série X_t, pode ser explicado como uma função de p valores passados, $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-p}$, onde p determina o número de etapas no passado necessárias para prever o valor atual.

Como um caso típico, lembremos do Exemplo I.10, no qual os dados foram gerados usando o modelo

$$X_t = X_{t-1} - 0.90X_{t-2} + W_t,$$

onde W_t é um ruído branco gaussiano com $\sigma_w^2 = 1$.

Agora assumimos que o valor atual é uma função linear particular de valores passados

$$\widehat{X}_{n+1}^n = X_n - 0.90X_{n-1},$$

onde a quantidade no lado esquerdo indica a previsão no próximo período $n+1$ com base nos dados observados, $X_1, \cdots, X_n$.

Definição III.1. Modelo autorregressivo de ordem p.

Dizemos que $\{X_t\}$ satisfaz um modelo autorregressivo de ordem p ou simplesmente $AR(p)$ se

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + W_t,$$

onde X_t é estacionário, $W_t \sim N(0, \sigma_w^2)$ é um ruído branco e $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p$ são constantes tais que $\phi_p \neq 0$.

A esperança de X_t satisfazendo um modelo autorregressivo é zero. Caso seja $\mathrm{E}(X_t) = \mu \neq 0$ podemos substituir X_t por $X_t - \mu$ e temos

$$X_t = \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + W_t,$$

sendo $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)$.

Notamos que o modelo acima é semelhante ao modelo de regressão da Seção II.1. Algumas dificuldades técnicas, entretanto, se desenvolvem na aplicação desse modelo porque os regressores $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-p}$, são componentes aleatórios, enquanto Z_t foi considerado fixo.

Uma forma útil segue usando o operador de retardo B para escrever o modelo $AR(p)$ como

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t = W_t$$

ou ainda de forma mais concisa como $\phi(B) X_t = W_t$.

Definição III.2. Operador autorregressivo de ordem p.

Definimos o operador autorregressivo de ordem p como

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)\cdot$$

Exemplo III.1. Modelo $AR(1)$.

Iniciamos a investigação de modelos de AR considerando o modelo de primeira ordem, AR(1), dado por $X_t = \phi X_{t-1} + W_t$. Iterando para trás k vezes, conseguimos

$$\begin{aligned} X_t &= \phi X_{t-1} + W_t = \phi(\phi X_{t-2} + W_{t-1}) + W_t \\ &= \vdots \\ &= \phi^k X_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j W_{t-j}\cdot \end{aligned}$$

Este método sugere que se $|\phi| < 1$ e $\sup_t \mathrm{Var}(X_t) < \infty$, podemos representar o modelo $AR(1)$ como um processo linear da forma

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}.$$

O modelo $AR(1)$ definido acima é estacionário com média

$$\mathrm{E}(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \mathrm{E}(W_{t-j}) = 0$$

e função de autocovariância

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \mathrm{E}\left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t+h-j}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k W_{t-k}\right)\right) \\
&= \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{h+j}\phi^j = \sigma_w^2 \phi^h \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = \frac{\sigma_w^2 \phi^h}{1-\phi^2}, \qquad h \geq 0.
\end{aligned}$$

Recordemos que $\gamma(h) = \gamma(-h)$, então vamos exibir apenas a função de autocovariância para $h \geq 0$. Assim, obtemos que o ACF de um modelo $AR(1)$ é da forma

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^h, \qquad h \geq 0,$$

e $\rho(h)$ satisfaz a recursão

$$\rho(h) = \phi\rho(h-1), \qquad h = 1, 2, \cdots$$

Discutiremos o ACF de um modelo geral $AR(p)$ na Seção III.3.

Definição III.3. O modelo de médias móveis de ordem q.

O modelo de médias móveis de ordem q ou $MA(q)$ é definido como

$$X_t = W_t + \theta_1 W_{t-1} + \theta_2 W_{t-2} + \cdots + \theta_q W_{t-q},$$

onde $W_t \sim N(0, \sigma_w^2)$ independentes e $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q$, $\theta_q \neq 0$ são parâmetros.

O sistema é o mesmo que o da média móvel infinita definida como o processo linear

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j W_{t-j} = \psi(B) W_t,$$

onde $\psi_0 = 1$, $\psi_j = \theta_j$, para $j = 1, \cdots, q$ e $\psi_j = 0$ para outros valores.

Podemos também escrever o processo $MA(q)$ na forma equivalente

$$X_t = \theta(B)W_t,$$

utilizando a seguinte definição.

Definição III.4. O operador de médias móveis.

O operador de médias móveis é definido como

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q.$$

Ao contrário do processo autoregressivo, o processo de médias móveis é estacionário para quaisquer valores dos parâmetros $\theta_1, \cdots, \theta_q$; detalhes desse resultado são fornecidos na Seção III.3.

Definição III.5. Modelo $ARMA(p, q)$.

A série temporal $\{X_t \ : \ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ é $ARMA(p, q)$ se é estacionária e

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + W_t + \theta_1 W_{t-1} + \cdots + \theta_q W_{t-q},$$

onde $\phi_p \neq 0$, $\theta_q \neq 0$ e $\sigma_W^2 > 0$. Os parâmetros p e q são chamados ordens autorregressivas e de médias móveis, respectivamente. Se X_t tiver uma média μ diferente de zero, definimos $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)$ e escrevemos o modelo como

$$X_t = \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + W_t + \theta_1 W_{t-1} + \cdots + \theta_q W_{t-q},$$

onde $W_t \sim N(0, \sigma_W^2)$ independentes.

Começamos exibindo o ACF de um processo $MA(q)$, $X_t = \theta(B)W_t$, onde $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$. Porque X_t é uma combinação linear finita de termos de ruído branco, o processo é estacionário com média

$$\mathrm{E}(X_t) \;=\; \sum_{j=0}^{q} \theta_j \mathrm{E}(W_{t-j}) \;=\; 0,$$

onde escrevemos $\theta_0 = 1$ e com função de autocovariância

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) \;=\; \mathrm{Cov}\left(\sum_{j=0}^{q} \theta_j W_{t+h-j}, \sum_{k=0}^{q} \theta_k W_{t-k}\right) \\
&= \begin{cases} \sigma_w^2 \displaystyle\sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}, & \text{quando} \quad 0 \leq h \leq q \\ 0, & \text{quando} \quad h > q \end{cases}.
\end{aligned}$$

Lembrando que $\gamma(h) = \gamma(-h)$, por isso somente exibiremos os valores para $h \geq 0$. Observe que $\gamma(q)$ não pode ser zero porque $\theta_q \neq 0$. O corte de $\gamma(h)$ após q lags é a assinatura do modelo $MA(q)$. Dividindo a expressão acima por $\gamma(0)$ produz o ACF de um $MA(q)$:

$$\rho(h) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\sum_{j=0}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2}, & \text{quando} \quad 1 \leq h \leq q \\ 0, & \text{quando} \quad h > q \end{cases}$$

Para um modelo $ARMA(p,q)$, $\phi(B)X_t = \theta(B)W_t$, onde os zeros de $\phi(z)$ estão fora do círculo unitário, escrevamos

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j W_{t-j}\cdot$$

Segue-se imediatamente que $\mathrm{E}(X_t) = 0$ e a função de autocovariância de X_t é

$$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \sigma_W^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h}, \qquad h \geq 0\cdot$$

Dividindo por $\gamma(0)$ nos permitirá resolver para o ACF, $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$.

Exemplo III.13. O ACF para um modelo $AR(p)$.

No Exemplo III.10 consideramos o caso $p = 2$. Numa situação geral, segue que

$$\rho(h) - \phi_1 \rho(h-1) - \cdots - \phi_p \rho(h-p) = 0, \qquad h \geq p\cdot$$

Sejam $z_1, \cdots, z_r$ as raízes de $\phi(z)$, cada com multiplicidade $m_1, \cdots, m_r$, respectivamente, onde $m_1 + \cdots + m_r = p$. Então, a solução geral é

$$\rho(h) = \frac{1}{z_1^h} P_1(h) + \frac{1}{z_2^h} P_2(h) + \cdots + \frac{1}{z_r^h} P_r(h), \qquad h \geq p,$$

onde $P_j(h)$ é um polinômio em h de grau $m_j - 1$.

Exemplo III.14. O ACF para um modelo $ARMA(1,1)$.

Consideremos o processo $ARMA(1,1)$ dado por $X_t = \phi X_{t-1} + \theta W_{t-1} + W_t$, onde $|\phi| < 1$. Com base na equação homogênea geral para o ACF de um processo $ARMA$ causal, a função de autocovariância satisfaz

$$\gamma(h) - \phi\gamma(h-1) = 0, \qquad h = 2, 3, \cdots,$$

e segue que, a solução geral é;

$$\gamma(h) = c\phi^h, \qquad h = 1, 2, \cdots,$$

com condições iniciais

$$\gamma(0) = \phi\gamma(1) + \sigma_w^2(1 + \theta\phi + \theta^2) \quad \text{e} \quad \gamma(1) = \phi\gamma(0) + \sigma_w^2\theta\cdot$$

Exemplo III.14. O ACF para um modelo $ARMA(1,1)$.

Portanto, a solução específica para $h \geq 1$ é

$$\gamma(h) = \frac{\gamma(1)}{\phi}\phi^h = \sigma_w^2 \frac{(1+\theta\phi)(\phi+\theta)}{1-\phi^2}\phi^{h-1}.$$

Finalmente, dividindo por $\gamma(0)$ produz o ACF

$$\rho(h) = \frac{(1+\theta\phi)(\phi+\theta)}{1+2\theta\phi+\theta^2}\phi^{h-1}, \qquad h \geq 1.$$

Observe que o padrão geral de $\rho(h)$ versus h acima não é diferente do de um $AR(1)$. Portanto, é improvável que possamos diferenciar entre um $ARMA(1,1)$ e um $AR(1)$ baseado somente em um ACF estimado a partir de uma amostra. Essa consideração nos levará à função de autocorrelação parcial.

Vimos que para modelos $MA(q)$ o ACF será zero para lags ou defasagens maiores que q. Além disso, porque $\theta_q \neq 0$, o ACF não será zero no atraso ou lag q. Assim, o ACF fornece uma quantidade considerável de informações sobre a ordem da dependência quando o processo é de médias móveis. Se o processo, no entanto, é *ARMA* ou *AR*, o ACF sozinho nos diz pouco sobre as ordens de dependência. Assim, vale a pena buscar uma função que se comportará como o ACF dos modelos *MA*, mas para os modelos AR, a saber, a função de autocorrelação parcial (PACF).

Lembre-se que se X, Y e Z forem variáveis aleatórias, então a correlação parcial entre X e Y, dada por Z, é obtida pela regressão de X em Z para obter $\widehat{X}$, regredindo Y em Z para obter $\widehat{Y}$ e então calculando

$$\rho_{XY|Z} = \text{Corr}\big(X - \widehat{X}, Y - \widehat{Y}\big)\cdot$$

Definição III.9. A função de autocorrelação parcial (PACF).

A função de autocorrelação parcial (PACF) de um processo estacionário, X_t, denotada por $\phi_{h,h}$, para $h = 1, 2, \cdots$ é

$$\phi_{1,1} \ = \ \text{Corr}(X_{t+1}, X_t) \ = \ \rho(1)$$

e

$$\phi_{h,h} \ = \ \text{Corr}\big(X_{t+h} - \widehat{X}_{t+h}, X_t - \widehat{X}_t\big), \qquad h \geq 2\cdot$$

O PACF $\phi_{h,h}$ é a correlação entre X_{t+h} e X_t com a dependência linear de $\{X_{t+1}, \cdots, X_{t+h-1}\}$ em cada, removido. Se o processo X_t é gaussiano, então $\phi_{h,h} = \text{Corr}(X_{t+h}, X_t | X_{t+1}, \cdots, X_{t+h-1})$, isto é, $\phi_{h,h}$ é o coeficiente de correlação entre X_{t+h} e X_t na distribuição bivariada de (X_{t+h}, X_t) condicional em $\{X_{t+1}, \cdots, X_{t+h-1}\}$.

Exemplo III.15. A PACF para um modelo $AR(1)$.

Considere a PACF do processo $AR(1)$ dado por $X_t = \phi X_{t-1} + W_t$, com $|\phi| < 1$. Por definição, $\phi_{1,1} = \rho(1) = \phi$. Para calcular $\phi_{2,2}$, considere a regressão de X_{t+2} em X_{t+1}, digamos $\widehat{X}_{t+2} = \beta X_{t+1}$. Escolhemos β minimizando

$$\mathrm{E}\big(X_{t+2} - \widehat{X}_{t+2}\big)^2 = \mathrm{E}\big(X_{t+2} - \beta X_{t+1}\big)^2 = \gamma(0) - 2\beta\gamma(1) + \beta^2\gamma(0)\cdot$$

Tomando derivadas em relação a β e definindo o resultado igual a zero, temos $\beta = \gamma(1)/\gamma(0) = \rho(1) = \phi$. Em seguida, considere a regressão de X_t em X_{t+1}, digamos $\widehat{X}_t = \beta X_{t+1}$. Escolhemos β minimizando

$$\mathrm{E}\big(X_t - \widehat{X}_t\big)^2 = \mathrm{E}\big(X_t - \beta X_{t+1}\big)^2 = \gamma(0) - 2\beta\gamma(1) + \beta^2\gamma(0)\cdot$$

Exemplo III.15. A PACF para um modelo $AR(1)$.

Esta é a mesma equação de antes, então $\beta = \phi$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \phi_{2,2} &= \text{Corr}\big(X_{t+2} - \widehat{X}_{t+2}, X_t - \widehat{X}_t\big) \\ &= \text{Corr}(X_{t+2} - \phi X_{t+1}, X_t - \phi X_{t+1}) \\ &= \text{Corr}(W_{t+2}, X_t - \phi X_{t+1}) = 0, \end{aligned}$$

por causalidade.

Portanto, $\phi_{2,2} = 0$. No próximo exemplo, veremos que neste caso, $\phi_{h,h} = 0$ para todo $h > 1$.

Exemplo III.16. O PACF para um modelo $AR(p)$.

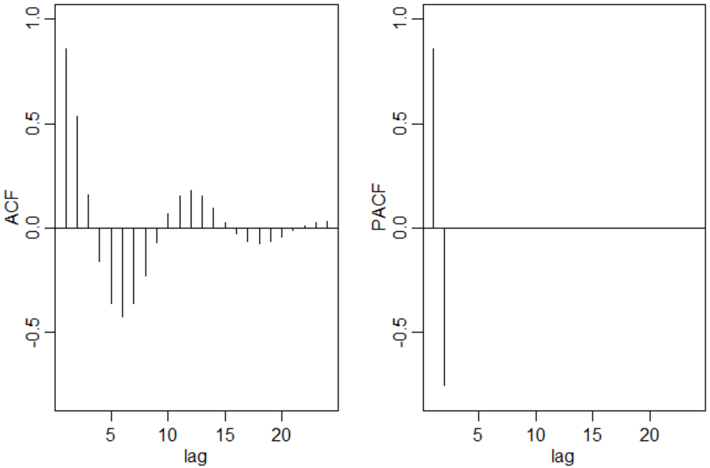
Este modelo implica que $X_{t+h} = \sum_{j=1}^{p} \phi_j X_{t+h-j} + W_{t+h}$, onde as raízes de $\phi(z)$ estão fora do círculo unitário. Quando $h > p$, a regressão de X_{t+h} em $\{X_{t+1}, \cdots, X_{t+h-1}\}$, é

$$\widehat{X}_{t+h} = \sum_{j=1}^{p} \phi_j X_{t+h-j}.$$

Ainda não provamos este resultado, mas vamos provar isso na próxima seção. Assim, quando $h > p$,

$$\phi_{h,h} = \text{Corr}\big(X_{t+h} - \widehat{X}_{t+h}, X_t - \widehat{X}_t\big) = \text{Corr}\big(W_{t+h}, X_t - \widehat{X}_t\big) = 0,$$

porque, pela causalidade, $X_t - \widehat{X}_t$ depende somente de $\{W_{t+h-1}, W_{t+h-2}, \cdots\}$.


ACF
1.0
0.5
0.0
-0.5
5
10
15
20
lag
PACF
1.0
0.5
0.0
-0.5
5
10
15
20
lag

Exemplo III.18. Análise preliminar da série de Recrutamento.

Consideramos o problema de modelagem da série Recrutamento mostrada no Exemplo I.5. Há 453 meses de Recrutamento observado variando ao longo dos anos 1950 a 1987. O ACF e o PACF amostrais, mostrados na figura abaixo, são consistentes com o comportamento de um $AR(2)$. O ACF tem ciclos correspondendo aproximadamente a um período de 12 meses e o PACF tem valores grandes para $h = 1, 2$ e, em seguida, é essencialmente zero para atrasos ou lag de ordem superior.

Esses resultados sugerem que um modelo autorregressivo de segunda ordem, ou seja, p=2 pode fornecer um bom ajuste.

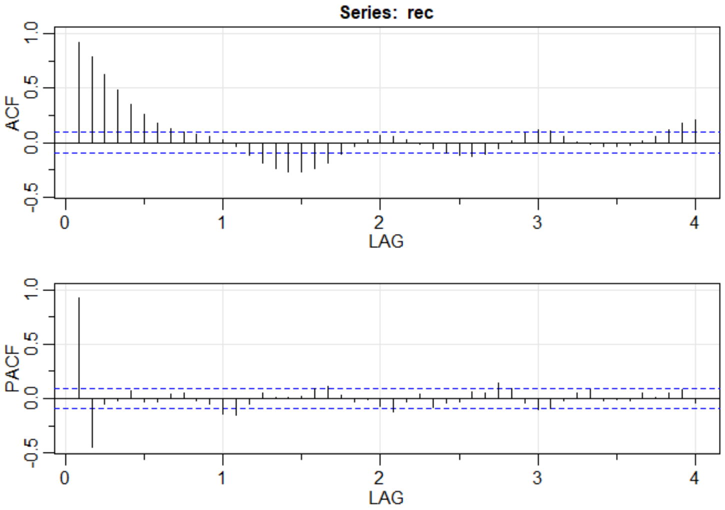
Exemplo III.18. Análise preliminar da série de Recrutamento.

Embora discutiremos a estimação em detalhes na Seção III.5, executamos uma regressão usando os trios de dados $\{(X;Z_1,Z_2) \; : \; (X_3;X_2,X_1),(X_4;X_3,X_2),\cdots,(X_{453};X_{452},X_{451})\}$ para ajustar um modelo da forma

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + W_t,$$

para $t = 3,4,\cdots,453$. As estimativas e os erros padrão (entre parênteses) são $\widehat{\phi}_0 = 6.74_{(1.11)}$, $\widehat{\phi}_1 = 1.35_{(0.04)}$, $\widehat{\phi}_2 = -0.46_{(0.04)}$ e $\widehat{\sigma}_W^2 = 89.72$.

```
> library(astsa)
> acf2(rec, 48) # produzindo valores e um gráfico
> (regr = ar.ols(rec, order=2, demean=FALSE, intercept=TRUE))

Call:
ar.ols(x = rec, order.max = 2, demean = FALSE, intercept = TRUE)

Coefficients:
      1        2
 1.3541  -0.4632

Intercept: 6.737 (1.111)

Order selected 2  sigma^2 estimated as  89.72
> regr$asy.se.coef # erros padrão das estimativas
$x.mean
[1] 1.110599

$ar
[1] 0.04178901 0.04187942
```


Series: rec
ACF
1.0
0.5
0.0
-0.5
0
1
2
3
4
LAG
PACF
1.0
0.5
0.0
-0.5
0
1
2
3
4
LAG