

Análise de Séries Temporais

VII. Métodos estatísticos no domínio da frequência

Fernando Lucambio

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Julho, 2023

Apresentamos os tópicos relacionados à análise de componentes principais e análise fatorial para séries temporais no domínio espectral.

As técnicas apresentadas aqui estão relacionadas entre si, pois se concentram na extração de informações pertinentes de matrizes espectrais. Esta informação é importante porque lidar diretamente com uma matriz espectral de alta dimensão $f(\omega)$ em si é um pouco complicado porque é uma função no conjunto de matrizes Hermitianas complexas, definidas não negativas.

Como nosso foco está em matrizes espectrais, assumimos por conveniência que as séries temporais de interesse têm médias zero.

O processo X_t é dito estacionário se $E(X_t)$ e $E(X_{t+h}X_t^*)$ existem e são independentes do tempo t . A função de autocovariância,

$$\Gamma_{xx}(h) = E(X_{t+h}X_t^*) - E(X_{t+h})E(X_t^*),$$

de X_t satisfaz condições semelhantes às do caso com valor real.

Escrevendo

$$\Gamma_{xx}(h) = \{\gamma_{ij}(h)\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, p,$$

temos

- ▶ $\gamma_{ii}(0) \geq 0$ é real,
- ▶ $|\gamma_{ij}(h)|^2 \leq \gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)$, para todos os inteiros h e
- ▶ $\Gamma_{xx}(h)$ é uma função definida não negativa.

A teoria espectral de séries temporais vetoriais complexas é análoga ao caso real.

Por exemplo, se

$$\sum_h \|\Gamma_{xx}(h)\| < \infty$$

a matriz de densidade espectral da série temporal complexa X_t é dada por

$$f_{xx}(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(h) \exp(-2\pi i h \omega).$$

A análise clássica de componentes principais (PCA) se preocupa em explicar a estrutura de variâncias-covariâncias entre as variáveis $X = (X_1, \dots, X_p)^\top$, por meio de algumas combinações lineares dos componentes de X .

Suponha que desejamos encontrar uma combinação linear

$$Y = \mathbf{c}^\top X = c_1 X_1 + \dots + c_p X_p$$

dos componentes de X de modo que $\text{Var}(Y)$ seja o maior possível. Como $\text{Var}(Y)$ pode ser aumentado simplesmente multiplicando por uma constante c é comum restringir c para ter comprimento unitário; ou seja, $\mathbf{c}^\top \mathbf{c} = 1$.

Observando que $\text{Var}(Y) = \mathbf{c}^\top \Sigma_{XX} \mathbf{c}$, onde Σ_{XX} é a matriz $p \times p$ de variâncias-covariâncias de X , outra maneira de declarar o problema é encontrar \mathbf{c} tal que

$$\max_{\mathbf{c} \neq 0} \frac{\mathbf{c}^\top \Sigma_{XX} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^\top \mathbf{c}}.$$

Denote os pares de autovalores e autovetores de Σ_{XX} por

$$\{(\lambda_1, \mathbf{e}_1), \dots, (\lambda_p, \mathbf{e}_p)\},$$

onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$ e os autovetores são de comprimento unitário. A solução para o máximo acima é escolher $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1$, caso em que a combinação linear $Y_1 = \mathbf{e}_1^\top X$ tem variância máxima, $\text{Var}(Y_1) = \lambda_1$. Em outras palavras,

$$\max_{\mathbf{c} \neq 0} \frac{\mathbf{c}^\top \Sigma_{XX} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^\top \mathbf{c}} = \frac{\mathbf{e}_1^\top \Sigma_{XX} \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{e}_1} = \lambda_1.$$

A combinação linear $Y_1 = e_1^\top X$ é chamada de primeira componente principal. Como os autovalores de Σ_{XX} não são necessariamente únicos, a primeira componente principal não é necessariamente única.

A segunda componente principal é definida como a combinação linear $Y_2 = c^\top X$ que maximiza $\text{Var}(Y_2)$ sujeito a $c^\top c = 1$ e tal que $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$. A solução é escolher $c = e_2$, caso em que $\text{Var}(Y_2) = \lambda_2$. Em geral, o k -ésimo componente principal, para $k = 1, 2, \dots, p$, é a combinação linear $Y_k = c^\top X$ que maximiza $\text{Var}(Y_k)$ sujeito a $c^\top c = 1$ e tal que $\text{Cov}(Y_k, Y_j) = 0$, para $j = 1, 2, \dots, k - 1$. A solução em cada situação é escolher $c = e_k$, caso em que $\text{Var}(Y_k) = \lambda_k$.

Uma medida da importância de uma componente principal é avaliar a proporção da variância total atribuída a essa componente principal. A variância total de X é definida como a soma das variâncias das componentes individuais; ou seja,

$$\text{Var}(X_1) + \cdots + \text{Var}(X_p) = \sigma_{11} + \cdots + \sigma_{pp},$$

onde σ_{jj} é o j -ésimo elemento da diagonal de Σ_{XX} .

A soma acima também é denotada como $\text{tr}(\Sigma_{XX})$ ou o traço de Σ_{XX} . Como

$$\text{tr}(\Sigma_{XX}) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_p,$$

a proporção da variância total atribuída a k -ésima componente principal é dada simplesmente por

$$\frac{\text{Var}(Y_k)}{\text{tr}(\Sigma_{XX})} = \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^p \lambda_j}.$$

Dada uma amostra aleatória x_1, \dots, x_n , as componentes principais amostrais são definidos como acima, mas com Σ_{xx} substituído pela matriz de variâncias-covariâncias amostral

$$S_{xx} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T.$$

Para o caso de séries temporais, suponha que temos processo vetorial $p \times 1$ estacionário X_t de média zero e matriz de densidade espectral $p \times p$ dada por $f_{xx}(\omega)$. Lembre-se de que $f_{xx}(\omega)$ é uma matriz Hermitiana de valor complexo, definida não negativa. Usando a analogia dos componentes principais clássicos, suponha que, para um valor fixo de ω , queremos encontrar um processo univariado de valor complexo $Y_t(\omega) = c^*(\omega)X_t$, onde $c(\omega)$ é complexo, de modo que a densidade espectral de $Y_t(\omega)$ é maximizada na frequência ω e $c(\omega)$ é de comprimento unitário, $c(\omega)^*c(\omega) = 1$.

Porque, na frequência ω , a densidade espectral de $Y_t(\omega)$ é

$$f_Y(\omega) = c(\omega)^* f_{XX}(\omega) c(\omega),$$

o problema pode ser reformulado como: encontrar o vetor complexo $c(\omega)$ de modo que

$$\max_{c(\omega) \neq 0} \frac{c(\omega)^* f_{XX}(\omega) c(\omega)}{c(\omega)^* c(\omega)}.$$

Sejam $\{(\lambda_1(\omega), e_1(\omega)), \dots, (\lambda_p(\omega), e_p(\omega))\}$ os pares de autovalores e autovetores de $f_{XX}(\omega)$ onde os autovetores têm comprimento unitário e os autovalores satisfazem que

$$\lambda_1(\omega) \geq \lambda_2(\omega) \geq \dots \geq \lambda_p(\omega) \geq 0.$$

Os autovalores de uma matriz Hermitiana são reais. A solução para a maximização anterior é escolher $c(\omega) = e_1(\omega)$; nesse caso, a combinação linear desejada é $Y_t(\omega) = e_1(\omega)^* X_t$. Para esta escolha,

$$\max_{c(\omega) \neq 0} \frac{c(\omega)^* f_{xx}(\omega) c(\omega)}{c(\omega)^* c(\omega)} = \frac{e_1(\omega)^* f_x(\omega) e_1(\omega)}{e_1(\omega)^* e_1(\omega)} = \lambda_1(\omega).$$

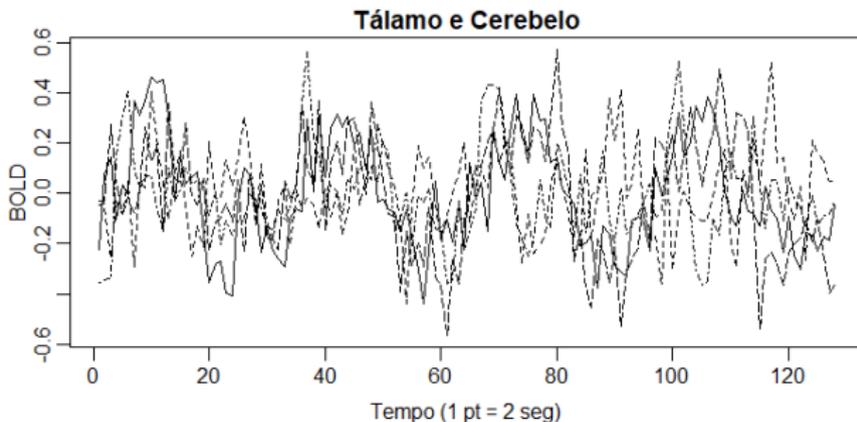
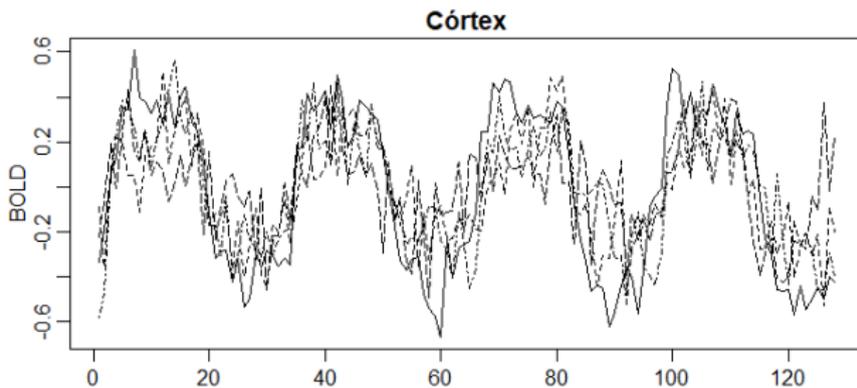
Este processo pode ser repetido para qualquer frequência! ω e o processo de valor complexo $Y_{t1}(\omega) = e_1^*(\omega) X_t$ é chamado de primeira componente principal na frequência ω .

A k -ésima componente principal na frequência ω ($k = 1, \dots, p$) é a série temporal de valores complexos $Y_{tk}(\omega) = e_k^*(\omega) X_t$, em analogia ao caso clássico. Neste caso, a densidade espectral de $Y_{tk}(\omega)$ na frequência ω é $f_{Y_k}(\omega) = e_k(\omega)^* f_{xx}(\omega) e_k(\omega) = \lambda_k(\omega)$.

Exemplo VII.13. Componentes principais dos dados de fMRI.

Lembremos do Exemplo I.6, onde a série temporal vetorial $X_t = (X_{t1}, \dots, X_{t8})^\top$, $t = 1, \dots, 128$, representa medidas consecutivas de intensidade de sinal dependente do nível médio de oxigenação do sangue (BOLD), que mede áreas de ativação no cérebro.

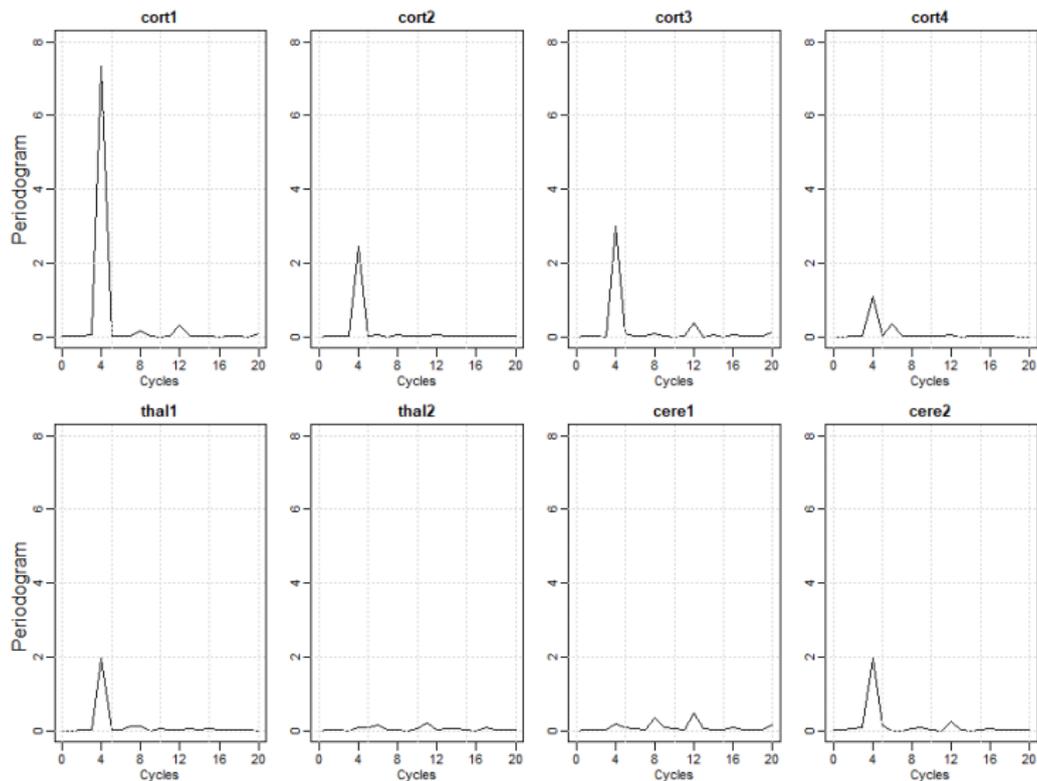
Os sujeitos receberam uma escovação indolor na mão e outros um estímulo que foi aplicado por 32 segundos e depois interrompido por 32 segundos; assim, o período do sinal é de 64 segundos, a taxa de amostragem foi uma observação a cada dois segundos por 256 segundos. As séries X_{tk} para $k = 1, 2, 3, 4$, representam locais no córtex, as séries X_{t5} e X_{t6} representam locais no tálamo e X_{t7} e X_{t8} representam locais no cerebelo.



Como fica evidente na figura acima, diferentes áreas do cérebro estão respondendo de maneira diferente e uma análise de componentes principais pode ajudar a indicar quais locais estão respondendo com a maior potência espectral e quais locais não contribuem para a potência espectral no período do sinal de estímulo.

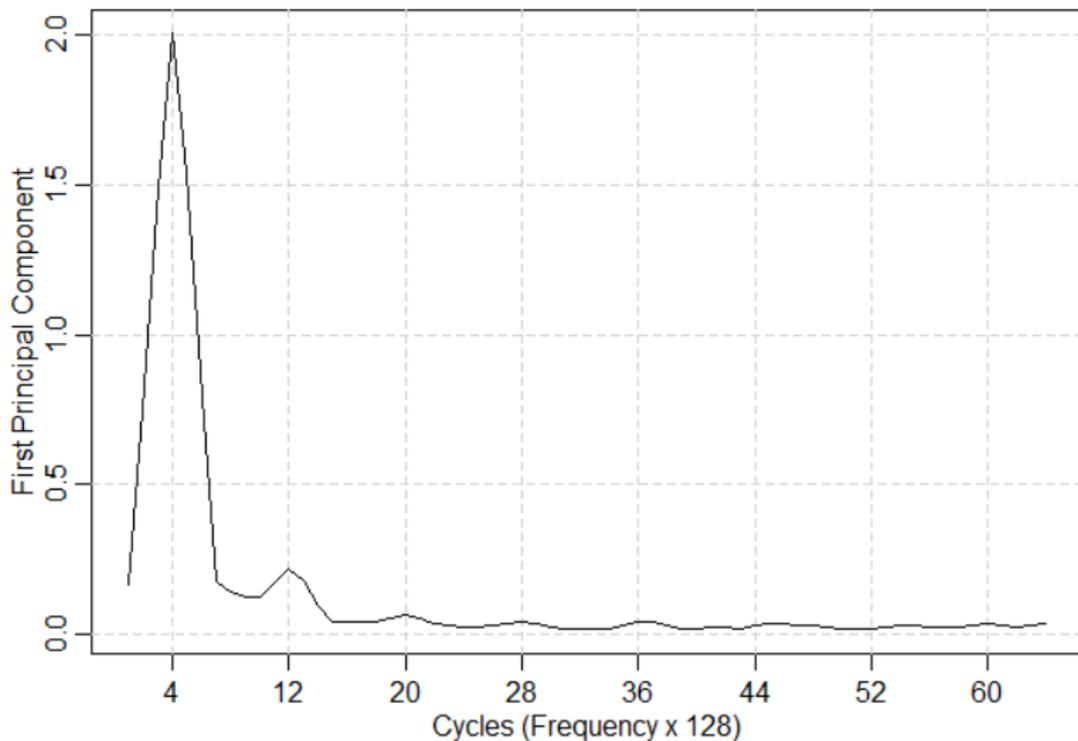
Nesta análise, vamos nos concentrar principalmente no período de sinal de 64 segundos, que se traduz em quatro ciclos em 256 segundos ou $\omega = 4/128$ ciclos por ponto de tempo.

A figura a seguir mostra periodogramas individuais das séries X_{tk} para $k = 1, \dots, 8$. Como ficou evidente na figura anterior, uma forte resposta ao estímulo da escova ocorreu em áreas do córtex. Para estimar a densidade espectral de X_t , usamos $\hat{f}_{xx}(\omega)$ acima com $L = 5$ e $\{h_0 = 3/9, h_{\pm 1} = 2/9, h_{\pm 2} = 1/9\}$; este é um kernel Daniell com $m = 1$ passado duas vezes.



O espectro estimado de $\hat{f}_{xx}(j/128), j = 0, \dots, 64$; podemos obter o espectro estimado da primeira série de componentes principais Y_{t1} calculando o maior autovalor $\hat{\lambda}_1(j/128)$, de $\hat{f}_{xx}(j/128)$ para cada $j = 0, 1, \dots, 64$. O resultado $\hat{\lambda}_1(j/128)$ é mostrado na figura abaixo.

Como esperado, há um grande pico na frequência de estímulo $4/128$, em que $\hat{\lambda}_1(4/128) = 2$. A potência total na frequência de estímulo é $\text{tr}(\hat{f}_{xx}(4/128)) = 2.05$, então a proporção da potência na frequência $4/128$ atribuída à primeira série de componentes principais é de cerca de $2/2.05$ ou cerca de 98%. Como a primeira componente principal explica quase toda a potência total na frequência do estímulo, não há necessidade de explorar as outras séries de componentes principais nessa frequência.



A primeira série de componentes principais estimada na frequência 4/128 é dada por

$$\widehat{Y}_{t1}(4/128) = \widehat{e}_1^*(4/128)X_t$$

e os componentes de $\widehat{e}_1^*(4/128)$ podem dar uma visão sobre quais locais do cérebro estão respondendo ao estímulo da escova.

A tabela mostra as magnitudes de $\widehat{e}_1^*(4/128)$. Além disso, um intervalo de confiança de aproximadamente 99%; foi obtido para cada componente usando a distribuição aproximada de

$$2|\widehat{e}_{1,j}(4/128) - e_{1,j}(4/128)|^2/s_j^2(4/128).$$

Tabela VII.5. Magnitudes do vetor de componentes principais na frequência de estímulo

Local	1	2	3	4	5	6	7	8
$ \hat{e}_1(4/128) $	0.64	0.36	0.36	0.22	0.32	0.05*	0.13	0.39

Como esperado, a análise indica que o local 6 não está contribuindo para o poder nesta frequência, mas surpreendentemente, a análise sugere que o local 5 (cerebelo 1) está respondendo ao estímulo.

A análise fatorial clássica é semelhante à análise clássica de componentes principais. Suponha que X seja um vetor aleatório $p \times 1$ de média zero com matriz de covariâncias Σ_{XX} . O modelo de fatorial propõe que X seja dependente de alguns fatores comuns não observados, Z_1, \dots, Z_q , mais erro. Nesse modelo, espera-se que q seja muito menor que p .

O modelo de fatorial é dado por

$$X = BZ + \epsilon,$$

onde B é uma matriz $p \times q$ de cargas fatoriais $Z = (Z_1, \dots, Z_q)^T$, as quais são vetores $q \times 1$ aleatórios de fatores tais que $E(Z) = 0$ e $E(ZZ^T) = I_q$, a matriz de identidade $q \times q$. O vetor $p \times 1$ de erro ϵ não observado é considerado independente dos fatores, com média zero e matriz diagonal de covariâncias

$$D = \text{diag}\{\delta_1^2, \dots, \delta_p^2\}.$$

De forma equivalente, o modelo fatorial acima, pode ser escrito em termos da estrutura de covariância de X ,

$$\Sigma_{XX} = \mathcal{B}\mathcal{B}^T + D,$$

ou seja, a matriz de covariâncias de X é a soma de uma matriz simétrica, definida não negativa e posto $q \leq p$ e uma matriz diagonal definida não negativa.

Se $q = p$, então Σ_{XX} pode ser reproduzido exatamente como $\mathcal{B}\mathcal{B}^T$, usando o fato de que $\Sigma_{XX} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \cdots + \lambda_p \mathbf{e}_p \mathbf{e}_p^T$, onde $(\lambda_i, \mathbf{e}_i)$ são os pares autovalor – autovetor de Σ_{XX} . No entanto, conforme indicado anteriormente, esperamos que q seja muito menor que p .

Infelizmente, a maioria das matrizes de covariâncias não podem ser fatoradas da forma acima quando q é muito menor que p .

Para motivar a análise fatorial, suponha que os componentes de X possam ser agrupados em grupos significativos. Dentro de cada grupo, os componentes são altamente correlacionados, mas a correlação entre variáveis que não estão no mesmo grupo é pequena.

Um grupo é supostamente formado por um único construto, representado como um fator não observável, responsável pelas altas correlações dentro de um grupo. Por exemplo, uma pessoa competindo em um decatlo realiza $p = 10$ eventos atléticos e podemos representar o resultado do decatlo como um vetor de pontuação 10×1 . Os eventos em um decatlo envolvem corrida, salto ou arremesso e é concebível que o vetor 10×1 de pontuações possa ser fatorado em $q = 4$ fatores, (1) força do braço, (2) força da perna, (3) velocidade de corrida e (4) resistência de corrida.

O modelo fatorial especifica que $\text{Cov}(X, Z) = B$ ou $\text{Cov}(X_i, Z_j) = b_{ij}$ onde b_{ij} é o ij -ésimo componente da matriz de carregamento fatorial B , para $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, q$.

Assim, os elementos de B são usados para identificar a quais fatores hipotéticos os componentes de X pertencem ou sobre os quais se carregam.

Neste ponto, alguma ambiguidade ainda está associada ao modelo fatorial. Seja Q uma matriz $q \times q$ ortogonal; isto é

$$Q^T Q = Q Q^T = I_q.$$

Seja $B_* = BQ$ e $Z_* = Q^T Z$ de maneira que o modelo fatorial pode ser escrito como

$$X = BZ + \epsilon = BQQ^T Z + \epsilon = B_* Z_* + \epsilon.$$

Dada uma amostra x_1, \dots, x_n , vários métodos são usados para estimar os parâmetros do modelo fatorial e discutiremos dois deles aqui. O primeiro método é o método de componentes principais.

Seja S_{xx} a matriz de covariâncias amostral e seja $(\hat{\lambda}_i, \hat{e}_i)$ os pares autovalor – autovetor de S_{xx} . A matriz $p \times q$ de cargas fatoriais estimadas é encontrada definindo

$$\hat{B} = \left(\hat{\lambda}_1^{1/2} \hat{e}_1 \mid \hat{\lambda}_2^{1/2} \hat{e}_2 \mid \dots \mid \hat{\lambda}_q^{1/2} \hat{e}_q \right).$$

O argumento aqui é que se q fatores existirem, então

$$S_{xx} \approx \hat{\lambda}_1 \hat{e}_1 \hat{e}_1^T + \dots + \hat{\lambda}_q \hat{e}_q \hat{e}_q^T = \hat{B} \hat{B}^T,$$

porque os autovalores restantes serão insignificantes.

A matriz diagonal estimada das variâncias dos erros é então obtida definindo $\widehat{D} = \text{diag}\{\widehat{\delta}_1^2, \dots, \widehat{\delta}_p^2\}$; onde $\widehat{\delta}_j^2$ é o j -ésimo elemento da diagonal de $S_{xx} - \widehat{B}\widehat{B}^\top$.

O segundo método, que pode fornecer respostas consideravelmente diferentes do método de componentes principais é a máxima verossimilhança. Supondo ainda que no modelo fatorial Z e ϵ sejam normais multivariados, o logaritmo da verossimilhança de B e D , ignorando uma constante é

$$-2 \ln(L(B, D)) = n \ln(|\Sigma_{xx}|) + \sum_{j=1}^n X_j^\top \Sigma_{xx}^{-1} X_j.$$

A verossimilhança depende de B e D por meio da relação $\Sigma_{xx} = BB^\top + D$.

Para séries temporais, suponha que X_t seja um processo estacionário com matriz espectral $f_{XX}(\omega)$. Análogo ao modelo clássico, podemos postular que em uma dada frequência de interesse ω , a matriz espectral de X_t satisfaz

$$f_{XX}(\omega) = B(\omega)B^*(\omega) + D(\omega),$$

$B(\omega)$ é uma matriz complexa de posto $\text{posto}(B(\omega)) = q \leq p$ e $D(\omega)$ é uma matriz real diagonal, definida não negativa. Tipicamente, esperamos que q seja muito menor que p .

Como exemplo de um modelo que dá origem à relação anterior, seja $x_t = (x_{t1}, \dots, x_{tp})^\top$ e suponha

$$x_{tj} = c_j s_{t-\tau_j} + \epsilon_{tj}, \quad j = 1, \dots, p,$$

onde $c_j \geq 0$ são amplitudes individuais e s_t é um sinal (fator) comum não observado com densidade espectral $f_{ss}(\omega)$. Os valores τ_j são as mudanças de fase individuais.

A transformada discreta de Fourier de x_{tj} é dada por

$$X_j(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n x_{tj} \exp(-2\pi i t \omega)$$

e, em termos do modelo $x_{tj} = c_j s_{t-\tau_j} + \epsilon_{tj}$, para $j = 1, \dots, p$,

$$X_j(\omega) = a_j(\omega) X_s(\omega) + X_{\epsilon_j}(\omega),$$

onde $a_j(\omega) = c_j \exp(-2\pi i \tau_j \omega)$ e $X_s(\omega)$ e $X_{\epsilon_j}(\omega)$ são as respectivas transformadas discretas de Fourier do sinal s_t e ruído ϵ_{tj} .

Empilhando os elementos individuais de $X_j(\omega) = a_j(\omega) X_s(\omega) + X_{\epsilon_j}(\omega)$, obtemos uma versão complexa do modelo fatorial clássico com um fator,

$$\begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_p(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\omega) \\ \vdots \\ a_p(\omega) \end{pmatrix} X_s(\omega) + \begin{pmatrix} X_{\epsilon_1}(\omega) \\ \vdots \\ X_{\epsilon_p}(\omega) \end{pmatrix}.$$

Da relação acima, podemos identificar os componentes espectrais do modelo; isso é,

$$f_{xx}(\omega) = b(\omega)b^*(\omega) + D_{\epsilon\epsilon}(\omega),$$

onde onde $b(\omega)$ é um vetor $p \times 1$ de valor complexo e

$$b(\omega)b(\omega)^* = a(\omega)f_{ss}(\omega)a(\omega)^*.$$

O modelo $f_{xx}(\omega) = b(\omega)b^*(\omega) + D_{\epsilon\epsilon}(\omega)$ pode ser considerado o modelo fatorial de um fator para séries temporais. Este modelo pode ser estendido para mais de um fator adicionando outros sinais independentes no modelo original $x_{tj} = c_j s_{t-\tau_j} + \epsilon_{tj}$, para $j = 1, \dots, p$.

Exemplo VII.15. Gastos do governo, investimento privado e desemprego.

A figura mostra a taxa de crescimento trimestral ajustada sazonalmente (como porcentagens) de cinco séries macroeconômicas: desemprego (unemp), PIB (gnp), consumo (consum), investimento governamental (govinv) e investimento privado (prinv) nos Estados Unidos entre 1948 e 1988, $n = 160$ valores.

Esses dados são analisados no domínio do tempo por Young and Pedregal (1998), que investigavam como os gastos do governo e o investimento de capital privado influenciavam a taxa de desemprego.

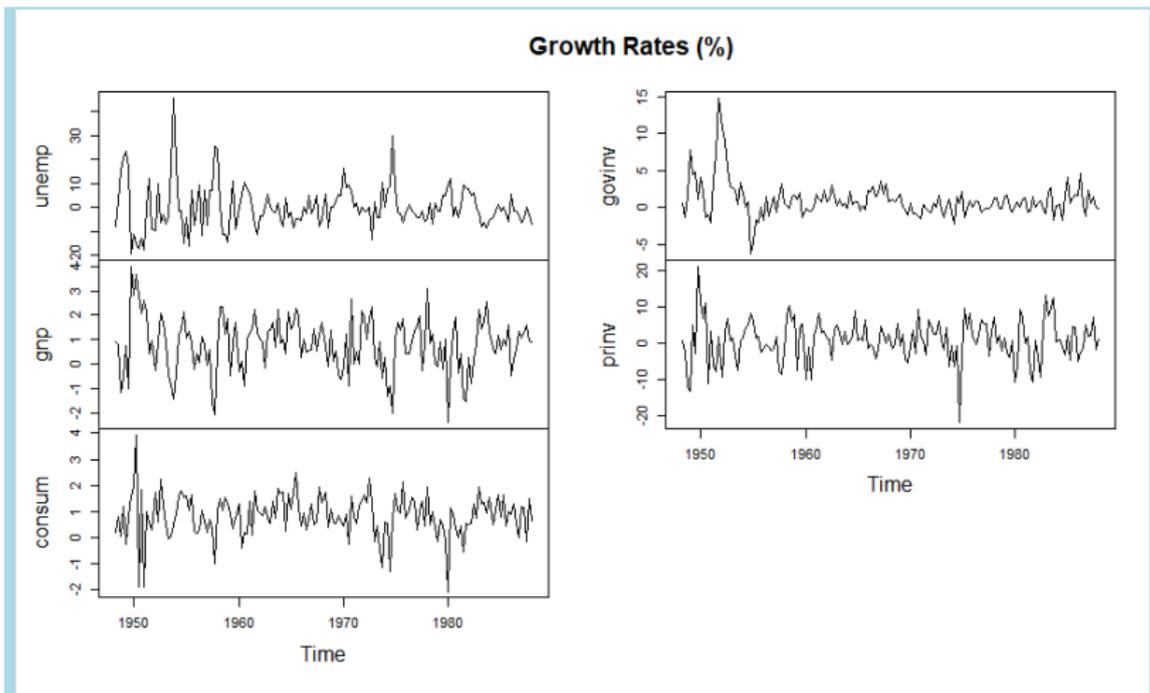


Figura VII.18: A taxa de crescimento trimestral ajustada sazonalmente (como porcentagens) de cinco séries macroeconômicas: desemprego, PIB, consumo, investimento público e investimento privado nos Estados Unidos entre 1948 e 1988, $n = 160$ valores.

A figura abaixo mostra os espectros estimados individuais de cada série. Concentramo-nos em três frequências interessantes. Em primeiro lugar, notamos a falta de potência espectral perto do ciclo anual $\omega = 1$ ou um ciclo a cada quatro trimestres; indicando que os dados foram ajustados sazonalmente. Além disso, devido ao ajuste sazonal, alguma potência espectral aparece perto da frequência sazonal; esta é uma distorção aparentemente causada pelo método de ajuste sazonal dos dados.

Em seguida, notamos o poder espectral próximo $\omega = 0.25$, ou um ciclo a cada quatro anos, no desemprego, PIB, consumo e, em menor grau, no investimento privado. Finalmente, o poder espectral parece próximo $\omega = 0.125$, ou um ciclo a cada oito anos em investimento governamental e talvez em menor grau em desemprego, PIB e consumo.

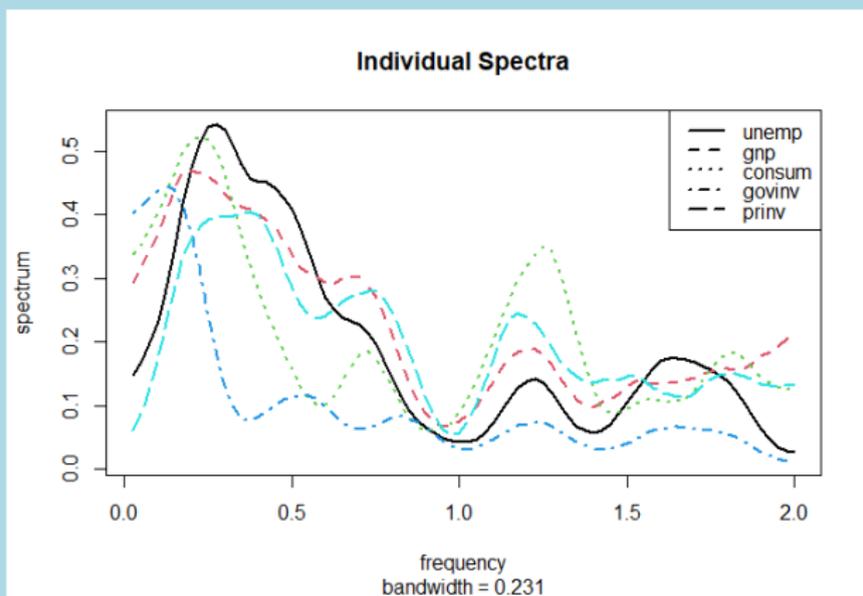


Figura VII.19: Os espectros estimados individuais (em escala de 1000) de cada série são mostrados na Figura 7.18 em termos do número de ciclos em 160 trimestres.

A Figura VII.19 mostra as coerências entre as várias séries. Nas frequências de interesse, $\omega = 0.125$ e $\omega = 0.25$, aos pares, PIB, Desemprego, Consumo e Investimento Privado (exceto Desemprego e Investimento Privado) são coerentes. O investimento governamental não é coerente ou é minimamente coerente com as outras séries.

Depois, a Figura VII.21 mostra $\hat{\lambda}_1(\omega)$ e o segundo $\hat{\lambda}_2(\omega)$, o primeiro e o segundo valores próprios da matriz espectral estimada $\hat{f}_{xx}(\omega)$. Esses valores próprios sugerem que o primeiro fator é identificado pela frequência de um ciclo a cada quatro anos, enquanto o segundo fator é identificado pela frequência de um ciclo a cada oito anos. O módulo dos autovetores correspondentes nas frequências de interesse, $\hat{e}_1(10/160)$ e $\hat{e}_2(5/160)$ confirmam a carga de Desemprego, PIB, Consumo e Investimento Privado no primeiro fator e cargas de Investimento do Governo no segundo fator.

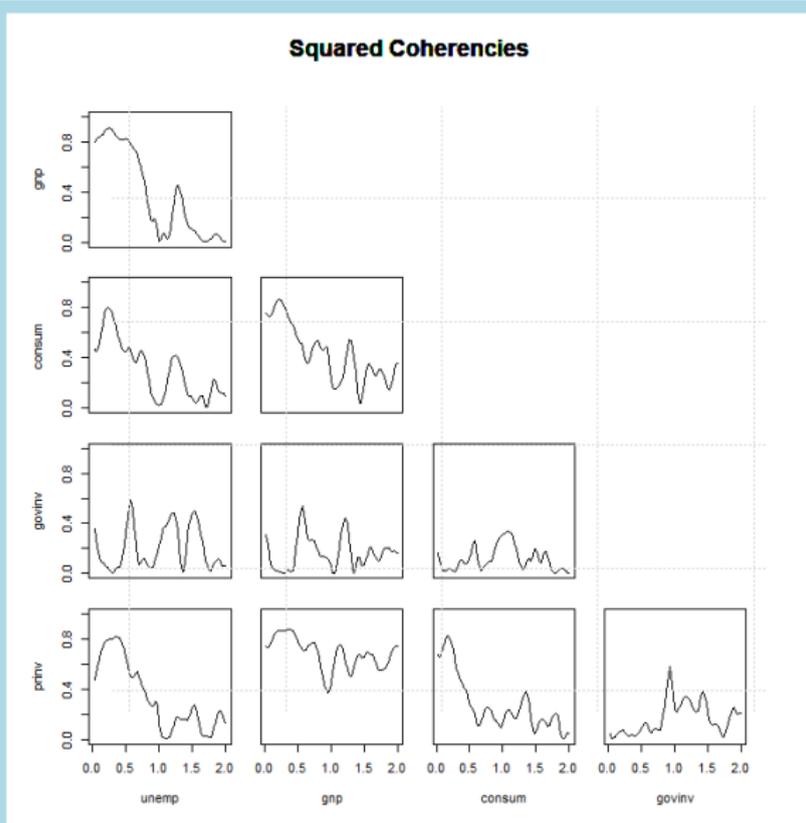


Figura VII.20: As coerências quadradas entre as várias séries exibidas na Figura VII.18.

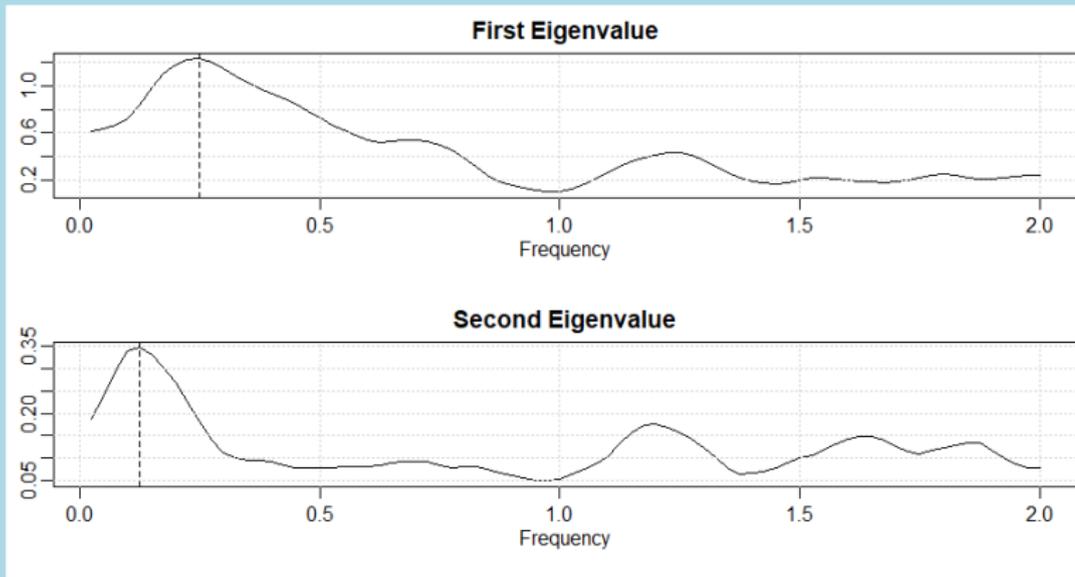


Figura VII.21: O primeiro $\hat{\lambda}_1(\omega)$ e o segundo $\hat{\lambda}_2(\omega)$ valores próprios da matriz espectral estimada $\hat{f}_{xx}(\omega)$. As linhas tracejadas verticais nos picos são $\omega = 0.25$ e $\omega = 0.125$, respectivamente.