

Modelos Lineares Generalizados

Fernando Lucambio

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

11 de maio de 2021

As funções de ligação específicas que podem ser usadas variam de uma família para outra. Por exemplo, não seria promissor usar as ligações identidade, log, inversa, inversa quadrado ou raiz quadrada com dados binomiais, nem seria sensato usar o logit, probit, log-log ou complementar log-log com dados não binomiais.

Presumimos que o leitor esteja geralmente familiarizado com as famílias gaussiana e binomial e simplesmente apresentamos suas distribuições aqui para referência. As distribuições Poisson, gama e Gaussiana inversa são talvez menos familiares, então fornecemos mais alguns detalhes:

- (a) A distribuição Gaussiana com esperança μ e variância σ^2 tem função de densidade

$$p(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- (b) A distribuição binomial para a proporção Y de sucessos em n tentativas binárias independentes com probabilidade de sucesso μ tem função de probabilidade

$$p(y) = \binom{n}{ny} \mu^{ny} (1 - \mu)^{n(1-y)} \text{ para } y = 0, 1, 2, \dots, n.$$

- Aqui, ny é o número observado de sucessos nas n tentativas e $n(1 - y)$ é o número de falhas; e

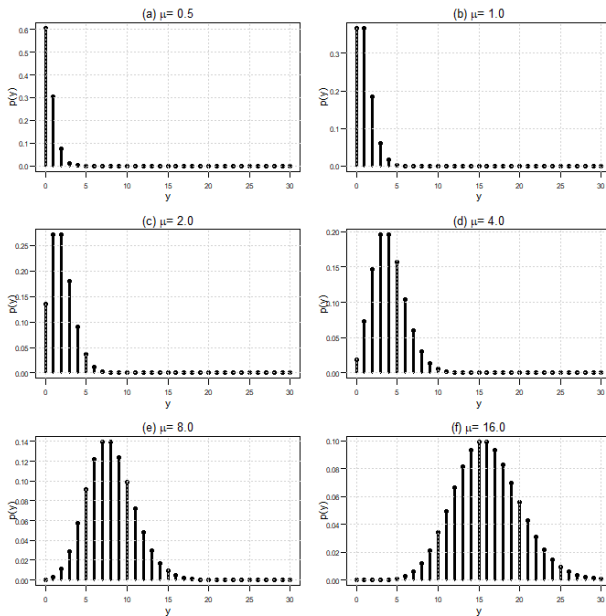
$$\binom{n}{ny} = \frac{n!}{(ny)!(n(1 - y))!}$$

é o coeficiente binomial.

- (c) A distribuição Poisson é uma família discreta com função de probabilidade indexada pelo parâmetro de taxa $\mu > 0$:

$$p(y) = \mu^y \frac{e^{-\mu}}{y!} \quad \text{para } y = 0, 1, 2, \dots$$

A esperança e a variância são ambas iguais a μ e representadas graficamente na figura abaixo. À medida que μ aumenta, a distribuição Poisson fica mais simétrica e é eventualmente bem aproximada por uma distribuição normal.



- A distribuição gama constitui uma família contínua com função de densidade indexada pelo parâmetro de escala $\omega > 0$ e parâmetro de forma $\psi > 0$

$$p(y) = \left(\frac{y}{\omega}\right)^{\psi-1} \frac{\exp(-y/\omega)}{\omega \Gamma(\psi)} \text{ para } y \geq 0,$$

onde $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} dz$ é a função gama e pode ser pensada como uma generalização contínua da função fatorial em que quando x é um número inteiro não negativo, $x! = \Gamma(x+1)$. A esperança e a variância desta distribuição são, respectivamente, $E(Y) = \omega\psi$ e $\text{Var}(Y) = \omega^2\psi$. No contexto de modelos lineares generalizados, onde, para a família gama, $V(Y) = \phi\mu^2$, o parâmetro de dispersão é simplesmente o inverso do parâmetro de forma, $\phi = 1/\psi$.

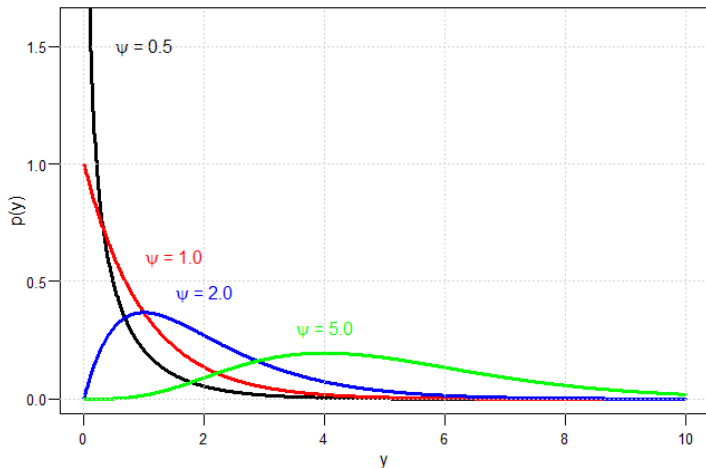


Figure 1: Várias distribuições gama para a escala $\omega = 1$ e vários valores do parâmetro de forma ψ .

- (e) A distribuição gaussiana inversa é outra família contínua indexada por dois parâmetros, μ e λ , com função de densidade

$$p(y) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y^3}} \exp\left(-\frac{\lambda(y - \mu)^2}{2y\mu^2}\right) \quad \text{para } y > 0.$$

A esperança e a variância de Y são $E(Y) = \mu$ e $\text{Var}(Y) = \mu^3/\lambda$. No contexto de modelos lineares generalizados, onde, para a família gaussiana inversa, $V(Y) = \phi\mu^3$, λ é o inverso do parâmetro de dispersão ϕ . Assim como a distribuição gama, portanto, a variância da distribuição gaussiana inversa aumenta com sua média, mas a uma taxa mais rápida. A assimetria também aumenta com o valor de μ e diminui com λ .

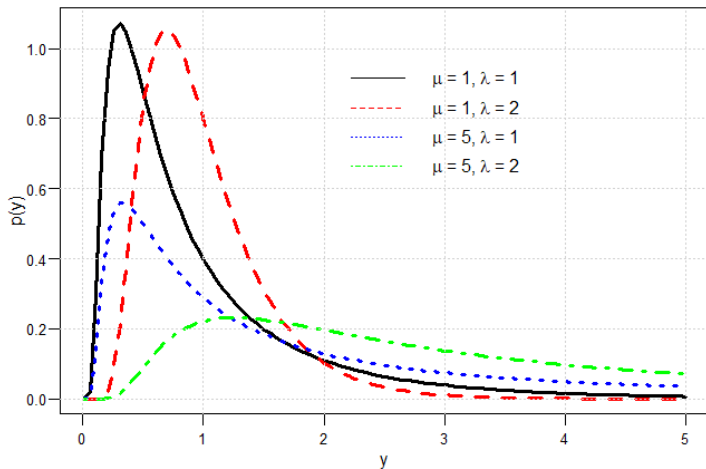


Figure 2: Distribuições gaussianas inversas para várias combinações de valores da média μ e dispersão $1/\lambda$.

Exemplo: Distribuição logarítmica

Vamos mostrar que a distribuição logarítmica, com função de probabilidades

$$p(y; \rho) = \frac{\rho^y}{-y \log(1 - \rho)}, \quad \text{para } y = 1, 2, \dots, 0 < \rho < 1,$$

pertence à família exponencial e, portanto, pode ser considerado um exemplo de modelo linear generalizado.

Lembremos que, uma função de densidade ou de probabilidade da forma

$$p(y; \theta, \phi) = \exp \left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi) \right),$$

constitui um caso particular de modelo linear generalizado.

Exemplo: Distribuição logarítmica

Então

$$\begin{aligned} p(y; \rho) &= \exp \left(\log \left(\rho^y / (-y \log(1 - \rho)) \right) \right) \\ &= \exp (y \log(\rho) - \log (-y \log(1 - \rho))) \\ &= \exp (y \log(\rho) - \log(y) - \log (-\log(1 - \rho))) \end{aligned}$$

Consideremos $\theta = \log(\rho)$, então $\rho = e^\theta$.

Desta forma, identificamos que $a(\phi) = 1$, $c(y, \phi) = -\log(y)$ e

$$b(\theta) = \log \left(-\log (1 - e^\theta) \right).$$

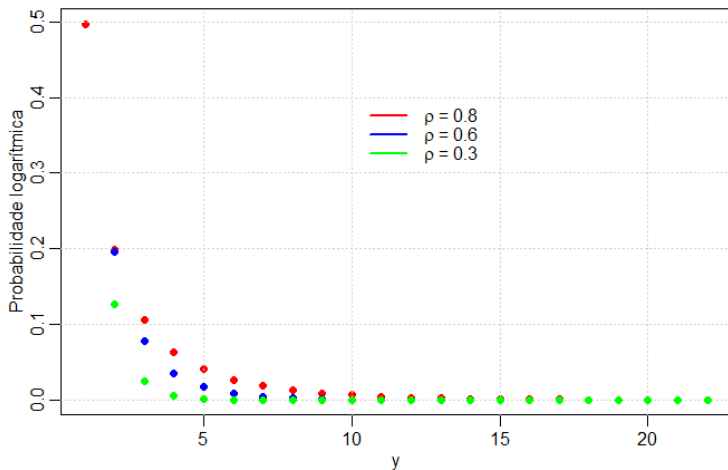


Figure 3: Distribuições logarítmica para vários valores do parâmetro ρ .

Exemplo: Distribuição logarítmica

```
> par(mfrow=c(1,1), mar=c(3,2,1,0)+.5, mgp=c(1.6,.6,0))
> plot(dlogarithmic(x, 0.8), col = "red", pch = 19, xlab = "y",
      ylab = "Probabilidade logarítmica")
> grid()
> points(dlogarithmic(x, 0.6), col = "blue", pch = 19)
> points(dlogarithmic(x, 0.3), col = "green", pch = 19)
> legend(10,0.4, legend = c(expression(paste(rho, " = 0.8")),
      expression(paste(rho, " = 0.6")),
      expression(paste(rho, " = 0.3"))), lwd = 2,
      col = c("red","blue","green"), bty = "n")
```