CE225 - Modelos Lineares Generalizados
Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Trabalho No.1

13 de maio de 2021

Entregar o relatório com as respostas na sua área na Equipe CE225 - Modelos Lineares Generalizados, no Microsoft Teams, até o dia 08 de junho de 2021.

1- Considere o modelo de regressão gaussiana quadrático

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \epsilon,$$

com observações independentes e $\mathrm{Var}(\epsilon) = \sigma^2$. Se $\beta_2 > 0$, determine o valor de x que minimiza a resposta esperada.

2- Considere o modelo de regressão linear

$$Y_i = X_i\beta + \epsilon_i, \qquad i = 1, 2 \cdots, n,$$

onde $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas com distribuição Exponencial de parâmetro λ, $X_i = (1, x_{i1}, \cdots, x_{ip})$ um vetor $1 \times (p+1)$ de constantes conhecidas e $\beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p)$ o vetor $(p+1) \times 1$ de parâmetros da regressão.

(a) Mostre que a função de densidade de cada Y_i é

$$f(y_i) = \lambda \exp\big(-\lambda\big(y_i - X_i\beta\big)\big), \quad \text{para} \quad y_i \geq X_i\beta,$$

lembrando que $y_1, \cdots, y_n$ são os valores observados das variáveis aleatórias $Y_1, \cdots, Y_n$.

(b) Suponha que $Y_i = x_i\beta + \epsilon_i$, $i = 1, \cdots, n$ onde $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas com parâmetro λ e $x_i > 0$, para todo i, ou seja, neste caso é o modelo de regressão linear simples exponencial sem intersepto. Se $\widehat{\beta}$ é o estimador de máxima verossimilhança de β, mostre que $\widehat{\beta} - \beta$ tem uma distribuição exponencial com parâmetro $\lambda \sum_{i=1}^n x_i$. Para isto demonstre primeiro que $\widehat{\beta} = \min_{1 \leq i \leq n} y_i/x_i$.

3- Suponha que Y tenha função de densidade ou de probabilidade da forma

$$f(y; \theta, \phi) = \exp\big(\theta y - b(\theta)/\phi + c(y, \phi)\big),$$

para $y \in A$, o suporte de Y que independe dos parâmetros θ e ϕ. Esta é uma alternativa à família geral de distribuições considerada nos modelos lineares generalizados e é particularmente apropriada para distribuições discretas.

(a) Mostre que a distribuição binomial negativa tem esta forma.

(b) Prove que $\mathrm{E}(Y) = \phi^{-1}b'(\theta)$ e que $\mathrm{Var}(Y) = \phi^{-1}b''(\theta)$.