Cadeias de Markov

Parte II. Cálculos com a função de transição

Fernando Lucambio

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Julho, 2020

Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados S e γ a função de transição. Vamos mostrar aqui como diversas probabilidades condicionais podem ser expressas em termos de γ e definiremos também a função de transição em m passos da Cadeia de Markov.

Teorema.

Seja $\{C_t : t \in \mathbb{N}\}$ uma Cadeia de Markov estacionária com espaço de estados S e matriz de transição $\Gamma = \gamma_{(x,y)}$. Então

$$P(C_{n+1} = c_{n+1}, \cdots, C_{n+m} = c_{n+m} \,|\, C_0 = c_0, \cdots, C_n = c_n) = \gamma_{c_n, c_{n+1}} \cdots \gamma_{c_{n+m-1}, c_{n+m}}.$$

Escrevendo convenientemente o resultado deste Teorema temos que

$$P\big(C_{n+1} = y_1, \cdots, C_{n+m} = y_m \,|\, C_0 = c_0, \cdots, C_{n-1} = c_{n-1}, C_n = x\big) = \gamma_{x,y_1}\gamma_{y_1,y_2} \cdots \gamma_{y_{m-1},y_n}.$$

Definição (função de transição em m-passos).

Seja $(\{C_t \,:\, t\in\mathbb{N}\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados S e matriz de transição $\Gamma = \big(\gamma_{x,y}\big)$. A função de transição em m-passos $\gamma_{x,y}^{(m)}$, a qual fornece a probabilidade de transição do estado x ao estado y em m-passos, define-se como

$$\gamma_{x,y}^{(m)} = \sum_{y_1}\cdots\sum_{y_{m-1}} \gamma_{x,y_1}\gamma_{y_1,y_2}\cdots\gamma_{y_{m-2},y_{m-1}}\gamma_{y_{m-1},y}, \tag{1}$$

para $m\geq 2$, como $\gamma_{x,y}^{(1)} = \gamma_{x,y}$ e como

$$\gamma_{x,y}^{(0)} = \begin{cases} 1, & \text{se } x=y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{2}$$

Podemos utilizar expressões anteriores para esclarecer ainda o conceito de função de transição em m-passos,

$$P(C_{n+m} = y \,|\, C_n = x) = \gamma_{x,y}^{(m)}.$$

Exemplo (Fila de servidor único)

Um gerente normalmente verifica o vendedor em sua loja a cada 5 minutos para ver se está ocupado ou não. Ele modela o estado do vendedor como 1 se está ocupado ou 2 caso não esteja ocupado. Consideremos a sequência de estados resultantes nas verificações como uma Cadeia de Markov com dois estados possíveis e função de transição estacionária dada pela seguinte matriz:

$$\Gamma = \begin{array}{l} \\ \text{Ocupado} \\ \text{Não ocupado} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Ocupado} & \text{Não ocupado} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 0.9 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 \end{array} \right) \end{array}.$$

O gerente percebe que, no final do dia, estará afastado por 10 minutos e vai perder uma vistoria do vendedor. Ele quer calcular a distribuição condicional dois períodos de tempo no futuro dado cada um dos estados possíveis. O raciocínio é da seguinte forma: se $C_n = 1$, por exemplo, o estado terá que ser 1 ou 2 no tempo $n+1$, mesmo que ele não se importe agora sobre o estado no tempo $n+1$. Mas, se ele calcula a distribuição condicional conjunta de C_{n+1} e C_{n+2} dado $C_n = 1$, ele pode somar sobre os possíveis valores de C_{n+1} para obter a distribuição condicional de C_{n+2} dado $C_n = 1$. Em símbolos,

$$\begin{aligned} P(C_{n+2} = 1 | C_n = 1) &= P(C_{n+2} = 1, C_{n+1} = 1 | C_n = 1) \\ &\quad + P(C_{n+2} = 1, C_{n+1} = 2 | C_n = 1)\cdot \end{aligned}$$

Exemplo (Fila de servidor único, continuação)

$$
\begin{aligned}
P(C_{n+2}=1, C_{n+1}=1|C_n=1) &= P(C_{n+1}=1|C_n=1)\times P(C_{n+2}=1|C_{n+1}=1) \\
&= 0.9\times 0.9 = 0.81\cdot
\end{aligned}
$$

Similarmente

$$
\begin{aligned}
P(C_{n+2}=1, C_{n+1}=2|C_n=1) &= P(C_{n+1}=2|C_n=1)\times P(C_{n+2}=1|C_{n+1}=2) \\
&= 0.1\times 0.6 = 0.06\cdot
\end{aligned}
$$

Segue que

$$P(C_{n+2}=1|C_n=1)=0.81+0.06=0.87$$

e, portanto,

$$P(C_{n+2}=2|C_n=1)=1-0.87=0.13\cdot$$

De maneira similar, se $C_n=2$,

$$P(C_{n+2}=1|C_n=2)=0.6\times 0.9+0.4\times 0.6=0.78$$

e

$$P(C_{n+2}=2|C_n=2)=1-0.78=0.22\cdot$$

Teorema (probabilidades de transição em $n+m$-passos)

Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov em S com matriz de transição $\Gamma = (\gamma_{x,y})$. Então, a probabilidade de transição em $n+m$-passos pode ser escrita em termos das probabilidades de transição em n-passos e m-passos como

$$\gamma_{x,y}^{(n+m)} = \sum_{z \in S} \gamma_{x,z}^{(n)} \gamma_{z,y}^{(m)}.$$

E em termos da distribuição inicial? como escrever a distribuição de C_n em termos da distribuição inicial π_0 e da probabilidade em n-passos? A resposta é fornecida pelo seguinte teorema.

Teorema

Seja $\{X_n\}$ uma Cadeia de Markov em S com matriz de transição $\Gamma = (\gamma_{x,y})$ e distribuição inicial π_0. Então, podemos escrever a distribuição de C_n da seguinte maneira

$$P(C_n = y) = \sum_{x \in S} \pi_0(x) \gamma_{x,y}^{(n)}.$$

O valor de $\gamma_{i,j}^{(2)}$ pode ser determinado da seguinte maneira: se a matriz de transição Γ é elevada ao quadrado, ou seja, se a matriz $\Gamma^2 = \Gamma \times \Gamma$ for calculada, o elemento da fila i e coluna j da matriz Γ^2 será $\sum_{r=1}^{N} \gamma_{i,r}\gamma_{r,j}$. Portanto, $\gamma_{i,j}^{(2)}$ será o elemento da fila i e a coluna j de Γ.

Por um argumento semelhante, a probabilidade de que a cadeia vai passar do estado i para o estado j em três etapas ou $\gamma_{i,j}^{(3)} = P(C_{n+3} = j|C_n = i)$, pode ser encontrada através da construção a matriz $\Gamma^3 = \Gamma^2\Gamma$. A probabilidade $\gamma_{i,j}^{(3)}$ será o elemento da fila i com a coluna j da matriz Γ^3. Em geral, temos o seguinte resultado.

Teorema (probabilidades de transição em *m*-passos)

Seja Γ a matriz de transição de uma Cadeia de Markov estacionária com espaço de estados finito. Para cada $m = 2, 3, \cdots$ a m-ésima potência Γ^m da matriz Γ tem na linha i e coluna j a probabilidade $\gamma_{i,j}^{(m)}$, a probabilidade da cadeia passar do estado i para o estado j em m passos.

Exemplo

Utilizando o Teorema anterior podemos calcular

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.87 & 0.13 \\ 0.78 & 0.22 \end{pmatrix}.$$

Uma outra forma de fazer os cálculos é utilizando um dos pacotes de funções disponíveis na linguagem de programação R. Utilizaremos o pacote de funções markovchain.

```
> library(markovchain)
> estados = c("Ocupado","Não ocupado")
> Prob.T=matrix(c(0.9,0.1,0.6,0.4),nrow=2, ncol=2,byrow=T,
          dimnames=list(estados,estados))
> ProbT = new("markovchain", states=estados,
          transitionMatrix=Prob.T, name="Fila de servidor único")
```

Com as linhas de comando acima fazemos a leitura do pacote de funções escolhido (markovchain), definimos os nomes dos estados e a matriz de probabilidades de transição. Temos por resultado um objeto de nome ProbT contendo a matriz no formato requerido. Basta agora digitar ProbT na linha de comandos do R e temos por resposta a matriz de probabilidades de transição.

Seja $\{C_n\}$ Cadeia de Markov com espaço de estados S e matriz de transição Γ e A um subconjunto de S. Estamos interessados em saber qual é a probabilidade da cadeia atingir um estado em A.

Definição

Seja $A \subseteq S$. O tempo de primeira visita T_A, da Cadeia de Markov $\{C_n\}$, ao conjunto de estados A é definido como

$$T_A = \min\{n \geq 0 \, : \, C_n \in A\},$$

e como $T_A = \infty$ se $A = \emptyset$.

Em outras palavras, T_A é uma variável aleatória com valores inteiros não negativos assumindo o primeiro tempo positivo em que a Cadeia de Markov atinge A. Denotaremos o tempo de primeira visita ao ponto $x \in S$ por T_x. Então

$$P_x(C_1 \neq y, C_2 \neq y, C_3 = y),$$

denota a probabilidade de que a Cadeia de Markov começando no estado x esteja no estado y no tempo 3, mas não nos tempos 1 e 2.

Teorema

Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados S e sejam $x, y \in S$. Então

$$\gamma_{x,y}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m)\gamma_{y,y}^{(n-m)},$$

para $n \geq 1$.

Definição (Probabilidade de atingir um conjunto A)

Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados S. A probabilidade de começar no estado $x \in S$ e atingir $A \subset S$, em um tempo finito, é definida como

$$\rho_{x,A} = P_x(T_A < \infty)\cdot$$

Então $\rho_{x,y}$ denota a probabilidade da Cadeia de Markov partindo do estado x e chegando o estado y ($A = \{y\}$) en algum tempo finito. Em particular, $\rho_{y,y}$ denota a probabilidade de que a Cadeia de Markov partindo de y retorne a y.

Observemos também que o tempo médio da cadeia atingir A é dado por

$$E_x(T_A) = \sum_{n<\infty} nP_x(T_A = n)\cdot$$

Dois resultados posteriores nos permitirão calcular explicitamente $\rho_{x,y}$ e $\mathrm{E}_x(T_A)$ por meio de certas equações lineares associadas à matriz de transição.

Exemplo

Consideremos a situação de uma Cadeia de Markov com matriz de transição

$$\Gamma = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Começando em 2, qual é a probabilidade de atingir o estado 4? Quanto tempo demora até que a cadeia estar no estado 1 ou no 4?

Exemplo (Continuação)

Observemos que

$$\rho_{1,4} = P_x(T_4 < \infty) = 0, \ \rho_{4,4} = P_x(T_4 < \infty) = 1, \ \mathrm{E}_1(T_{\{1,4\}}) = 0 \text{ e } \mathrm{E}_4(T_{\{1,4\}}) = 0\cdot$$

Assim, a partir de 2, a probabilidade de acertar o estado 4 é 1/3 e o tempo médio para chegar é 2 assim como é dois também o tempo médio para chegar ao estado 1.

Teorema

Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados S e matriz de probabilidades de transição $= (\gamma_{x,y})$. O vetor de probabilidades $\{\rho_{x,A}, \ x \in S\}$, as probabilidades do tempo de primeira visita ao conjunto A a partir de qualquer estado $x \in S$, é a solução não negativa mínima do sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} \rho_{x,A} &= 1, & \forall x \in A \\ \rho_{x,A} &= \sum_{y\in} \gamma_{x,y}\rho_{y,A}, & \forall x \notin A\cdot \end{aligned}$$

Exemplo (Continuação)

O sistema de equações lineares para $\rho_{2,4}$ é dado aqui por $\rho_{4,4} = 1$ e

$$\rho_{2,4} = \frac{1}{2}\rho_{1,4} + \frac{1}{2}\rho_{3,4}, \qquad \rho_{3,4} = \frac{1}{2}\rho_{2,4} + \frac{1}{2}\rho_{4,4}$$

de maneira que

$$\rho_{2,4} = \frac{1}{2}\rho_{1,4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\rho_{2,4} + \frac{1}{2}\right)$$

e

$$\rho_{2,4} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\rho_{1,4}, \qquad \rho_{3,4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\rho_{1,4}.$$

O valor de $\rho_{1,4}$ não é determinado pelo sistema de equações, mas a condição mínima agora nos faz assumir $\rho_{1,4} = 0$, portanto, obtemos $\rho_{2,4} = 1/3$ como antes. Naturalmente, a condição de contorno $\rho_{1,4} = 0$ era óbvia desde o início para construir nosso sistema de equações e não temos de preocuparmos sobre soluções mínimas não negativos.

Teorema

Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados S e matriz de probabilidades de transição $\Gamma = (\gamma_{x,y})$. O vetor de tempos médios $\{\mathrm{E}_x(T_A), \ x \in S\}$, os tempos médios de primeira visita ao conjunto A a partir de qualquer estado $x \in S$, é a solução não negativa mínima do sistema de equações lineares

$$\mathrm{E}_x(T_A) = 0, \quad \forall x \in A, \quad \text{e} \quad \mathrm{E}_x(T_A) = 1 + \sum_{y \notin A} p_{x,y} \mathrm{E}_y(T_A), \quad \forall x \notin A\cdot$$

Exemplos (continuação)

Quanto tempo demora até que a cadeia atinja o conjunto $\{1,4\}$? Vejamos o sistema de equações para $\mathrm{E}_x(T_{\{1,4\}})$, $x \in \{1,2,3,4\}$.
Primeiro

$$\mathrm{E}_1(T_{\{1,4\}}) = \mathrm{E}_4(T_{\{1,4\}}) = 0\cdot$$

Também $\mathrm{E}_2(T_{\{1,4\}}) = 1 + p_{2,2}\mathrm{E}_2(T_{\{1,4\}}) + p_{2,3}\mathrm{E}_3(T_{\{1,4\}})$ e

$$\mathrm{E}_3(T_{\{1,4\}}) = 1 + p_{3,2}\mathrm{E}_2(T_{\{1,4\}}) + p_{3,3}\mathrm{E}_3(T_{\{1,4\}})\cdot$$

Não é difícil obter que $\mathrm{E}_2(T_{\{1,4\}}) = \mathrm{E}_3(T_{\{1,4\}}) = 2$.

Definição (Estado absorvente)

Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados S e matriz de probabilidades de transição $\Gamma = (\gamma_{x,y})$. O estado $a \in S$ é chamado de estado absorvente se $\gamma_{a,a} = 1$ ou, equivalentemente, se $\gamma_{a,y} = 0$, para todo $y \neq a$.

Observemos que isto quer dizer que um estado do qual a cadeia não pode fugir, uma vez que chegou nele, é chamado de estado absorvente. Isto acontece no caso do Exemplo do Fast food, neste caso o estado 4 é absorvente, isto devido a que $\gamma_{4,4} = 1$.

Exemplo (Experiência de criação de plantas)

Observemos a matriz de probabilidades de transição fornecida no Exemplo 9, experiência de criação de plantas. Claramente temos dois estados absorventes: {AA,AA} e {aa,aa}. A dúvida é se existe algum outro estado que seja absorvente, ou seja, pelo que demonstramos, se partirmos de qualquer estado x, com probabilidade positiva vamos chegar à a, o estado absorvente num tempo finito n. Isto acontece nesta cadeia? com os seguintes comandos **R** vamos demonstrar que isso não acontece:

Exemplo (continuação)

```
> estados = c("AA,AA","AA,Aa","AA,aa","Aa,Aa","Aa,aa","aa,aa")
> Prob.T=matrix(c(1,0,0,0,0,0,0.25,0.5,0,0.25,0,0,
        0,0,0,1,0,0,0.0625,0.25,0.125,0.25,0.25,0.0625,
        0,0,0,0.25,0.5,0.25,0,0,0,0,0,1),
        nrow=6,ncol=6,byrow=T, dimnames=list(estados,estados))
> ProbT = new("markovchain", states=estados, transitionMatrix=Prob.T,
        name="Exemplo 1.13")
> ProbT^100
Exemplo 1.13^100
 A 6 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
 AA,AA, AA,Aa, AA,aa, Aa,Aa, Aa,aa, aa,aa
 The transition matrix (by rows) is defined as follows:
      AA,AA        AA,Aa        AA,aa        Aa,Aa        Aa,aa   aa,aa
AA,AA  1.00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00  0.00
AA,Aa  0.75 1.6358360e-10 3.1241690e-11 2.0220040e-10 1.635836e-10 0.25
AA,aa  0.50 2.4993350e-10 4.7733050e-11 3.0893480e-10 2.499335e-10 0.50
Aa,Aa  0.50 2.0220040e-10 3.8616850e-11 2.4993305e-10 2.022004e-10 0.50
Aa,aa  0.25 1.6358360e-10 3.12416900e-11 2.0220040e-10 1.635836e-10 0.75
aa,aa  0.00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00  1.00
```

Observe que

$$P_x(T_y = 1) = P_x(C_1 = y) = \gamma_{x,y}$$

e que

$$P_x(T_y = 2) = \sum_{z \neq y} P_x(C_1 = z, C_2 = y) = \sum_{z \neq y} \gamma_{x,z}\gamma_{z,y}.$$

Na situação de altos valores de n, as probabilidades $P_x(T_y = n)$ podem ser encontradas utilizando a expressão

$$P_x(T_y = n+1) = \sum_{z \neq y} \gamma_{x,z} P_z(T_y = n)$$

caso $n \geq 1$.

Para chegar ao estado y partindo do estado x, pela primeira vez no tempo $n+1$, é necessário ir a algum estado $z \neq y$ num primeiro passo e então ir do estado z ao estado y pela primeira vez no final de n passos adicionais.

Definição (Estados transientes e estados recorrente)

Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados S. O estado $y \in S$ é chamado de recorrente se $\rho_{y,y} = 1$ caso contrário, isto é, se $\rho_{y,y} < 1$ o estado y é chamado de transiente.

Se o estado y for recorrente, a Cadeia de Markov partindo de y retorna a y com probabilidade 1. Se o estado y é transiente, a Cadeia de Markov partindo de y tem probabilidade positiva $1 - \rho_{y,y}$ de nunca voltar ao estado y. Se y for um estado absorvente, então $P_y(T_y = 1) = \gamma_{y,y} = 1$ e, então $\rho_{y,y} = 1$, portanto um estado absorvente é necessariamente recorrente.

Definição (Número de vezes no estado y)

Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados S. Definimos a variável aleatória $N(y)$ como o número de vezes $n \geq 1$, que a cadeia está no estado $y \in S$.

Utilizando a função indicadora, vemos que $1_y(C_n) = 1$ se a cadeia está no estado y no tempo n e $1_y(C_n) = 0$ caso contrário, vemos que

$$N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_y(C_n)\cdot$$

Também observamos que o evento $\{y \, : \, N(y) \geq 1\}$ é o mesmo do que o evento $\{y \, : \, T_y < \infty\}$. Então

$$P_x(N(y) \geq 1) = P_x(T_y < \infty) = \rho_{x,y}\cdot$$

Agora estamos em condições de encontrar a expressão da probabilidade de que uma cadeia visite um estado um determinado número de vezes. Como veremos, utilizando estas relações vamos obter resultados mais poderosos que nos permitirão encontrar as probabilidades de atingirmos um determinado estado.

Teorema

Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados S. Então

$$P_x(N(y)=m)=\rho_{x,y}\rho_{y,y}^{m-1}(1-\rho_{y,y}), \qquad m\geq 1\cdot$$

Definição (Esperança de C_n começando no estado x)

Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov estacionária com espaço de estados S e função de transição p. Definimos por $\mathrm{E}_x(C_n)$ a esperança da variável aleatória C_n na cadeia começando no estado x.

Exemplo (Fast food, continuação)

Encontremos o número esperado de vezes que a cadeia assume o valor 1 partido de 1. Utilizando a expressão

$$\mathrm{E}_1\big(N(1)\big)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{1,1}^{(n)},$$

temos que $\mathrm{E}_1\big(N(1)\big)=0.3333333$. Por outro lado $\mathrm{E}_1\big(N(2)\big)=2$.

Exemplo (Fast food, continuação)

Como foram obtidos estes números?

Utilizando a linguagem de programação R podemos fazer os cálculos necessários para encontrar $\mathrm{E}_x\big(N(y)\big)$, $\forall x, y \in$. Num Exemplo anterior foi introduzida a forma de construir a matriz de probabilidades de transição para sua posterior utilização em nossos cálculos. Aprendemos a encontrar as probabilidades $\gamma_{x,y}^{(n)}$, qualquer seja o valor finito de n. Agora necessitamos mais um passo, somar essas probabilidades. Para isso definimos a função Soma, de argumentos a matriz Γ e o número de somas.

Podemos afirmar então que o número esperado de vezes que a cadeia visita o estado 3 partindo de 0 é $\mathrm{E}_0\big(N(3)\big) = 4$.

Qual é o número médio de refeições necessário para completar a coleção?

A resposta é indireta, no sentido de que seriam necessários pelo menos 8, seriam necessário pelo menos $\mathrm{E}_0\big(N(1)\big) + \mathrm{E}_0\big(N(2)\big) + \mathrm{E}_0\big(N(3)\big)$ refeições para completar a coleção.

Teorema

Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov estacionária com espaço de estados S e matriz de probabilidades de transição $\Gamma = (\gamma_{x,y})$. Temos duas situações:

(a) Se $y \in S$ é transiente, então $P_x\big(N(y) < \infty\big) = 1$ e $\mathrm{E}_x\big(N(y)\big) = \dfrac{\rho_{x,y}}{1-\rho_{x,y}}$, a qual é finita para todo $x \in S$.

(b) Se $y \in S$ é recorrente, então $P_y\big(N(y) = \infty\big) = 1$ e $\mathrm{E}_y\big(N(y)\big) = \infty$. Também

$$P_x\big(N(y) = \infty\big) = P_x(T_y < \infty) = \rho_{x,y}, \qquad x \in S\cdot$$

Se $\rho_{x,y} = 0$, então $\mathrm{E}_x\big(N(y)\big) = 0$, enquanto se $\rho_{x,y} > 0$, $\mathrm{E}_x\big(N(y)\big) = \infty$.

Este teorema descreve a diferença fundamental entre um estado transiente e um estado recorrente. Se y é um estado transiente, então não importa onde a Cadeia de Markov começou, ela fará apenas um número finito de visitas a y e o número esperado de visitas ao y é finito. Suponha que y seja um estado recorrente. Se a cadeia começa em y, ela voltará ao y infinitas vezes. Se a cadeia começa em algum outro estado x, pode ser impossível para ela sempre atingir y. Se for possível e a cadeia não visitar y pelo menos uma vez, então o fará infinitamente vezes.

Definição (Cadeia transiente)

Uma Cadeia de Markov $\{C_n\}$ é chamada de cadeia transiente se todos os seus estados forem estados transientes.

Teorema

Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov estacionária com espaço de estados S. Então, se o espaço de estados S for finito a cadeia deve ter pelo menos um estado recorrente e, portanto, não pode ser uma cadeia transiente.

Corolário

Se y é um estado transiente, então $\lim_{n\to\infty} \gamma_{x,y}^{(n)} = 0$.

Exemplo

Considere uma Cadeia de Markov com matriz de transição

$$\Gamma = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot$$

Queremos encontrar $P_1(T_1 < \infty)$ e $P_1(T_2 < \infty)$.

Devemos observar que o Corolário permite-nos caracterizar os estados transientes. Observemos que

$$\Gamma^{1000} = \begin{pmatrix} 2.703815e^{-48} & 6.103413e^{-48} & 1 \\ 4.577560e^{-48} & 1.033308e^{-47} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com o qual fica claro que os estados 1 e 2 são transientes e o estado 3 é absorvente, portanto, recorrente. Também temos que

$$\mathrm{E}_1\big(N(1)\big) = 1/2 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{E}_1\big(N(2)\big) = 1/3\cdot$$

Agora, pelo Teorema 12 chegamos a que $\rho_{1,1} = 1/3$ e $\rho_{1,2} = 1/4$.

Definição (Cadeia recorrente)

Uma Cadeia de Markov $\{C_n\}$ é dita ser recorrente se todos os seus estados forem estados recorrentes.

Nem todas as cadeias devem ser ou transientes ou recorrentes. Pelo Teorema 13 sabemos que cadeias transientes, se existirem, devem ter espaço de estados infinito. O seguinte exemplo nos mostra que cadeias recorrentes existem.

Exemplo (Compras de pasta de dentes)

Consideramos um cliente que escolhe entre duas marcas de pasta de dentes A e B, em várias ocasiões. Nesta situação, a sequência de estados $C_1, C_2, \cdots$ é um processo estocástico com dois estados possíveis em cada tempo. As probabilidades de compra foram especificadas e este processo estocástico é uma Cadeia de Markov estacionária com matriz de transição

$$\Gamma = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Este é um exemplo de Cadeia de Markov recorrente, devido a que os estados A e B ambos são recorrentes.

Exemplo (continuação)

Para verificar esta afirmação utilizamos a função Soma, obtendo-se

```
> Soma(ProbT,1000)
          Marca A   Marca B
Marca A   499.875   500.125
Marca B   500.125   499.875
```

ou ainda

```
> Soma(ProbT,3000)
          Marca A    Marca B
Marca A   1499.875   1500.125
Marca B   1500.125   1499.875
```

Isto mostra que

$$\mathrm{E}_A\big(N(A)\big) = \mathrm{E}_A\big(N(B)\big) = \mathrm{E}_B\big(N(A)\big) = \mathrm{E}_B\big(N(B)\big) = \infty \cdot$$

Logo, os estados desta cadeia são recorrentes, pelo Teorema 12 item b).