Cadeias de Markov

Parte III. Decomposição do espaço de estados

Fernando Lucambio

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Julho, 2020

Vamos considerar sempre que $\{C_n\}$ é uma Cadeia de Markov estacionária com espaço de estados S e sejam $x, y \in S$, estados da cadeia.

Definição (Estados que se comunicam).

Dizemos que o estado x se comunica com y se $\rho_{x,y} > 0$.

Pode-se demonstrar que x se comunica com y se, e somente se, $\gamma_{x,y}^{(n)} > 0$, para algum $n \geq 1$. Também é possível mostrar que se x se comunica com y e y se comunica com z, então x se comunica com z. Isto implica que esta propriedade dos estados é transitiva.

Teorema 15

Seja x um estado recorrente e suponha que x comunica a y. Então, y é recorrente e $\rho_{x,y} = \rho_{y,x} = 1$.

Exemplo

No Exemplo 7 temos que a potência 1000 da matriz de probabilidades de transição é da forma

> Google^{1000}

1 2 3 4 5

The transition matrix (by rows) is defined as follows

	1	2	3	4	5
1	0.1052632	0.1578947	0.2210526	0.2421053	0.2736842
2	0.1052632	0.1578947	0.2210526	0.2421053	0.2736842
3	0.1052632	0.1578947	0.2210526	0.2421053	0.2736842
4	0.1052632	0.1578947	0.2210526	0.2421053	0.2736842
5	0.1052632	0.1578947	0.2210526	0.2421053	0.2736842

Assim percebemos que nesta cadeia todos os estados se comunicam.

Como saber se os estados são recorrentes?

Definição (Conjunto de estados fechado)

Um conjunto $F \subset S$ de estados é dito ser um conjunto fechado se não existirem estados dentro de F que se comuniquem com qualquer estado fora de F.

Significa que se F é um conjunto fechado então $\rho_{x,y} = 0$, $x \in F$ e $y \notin F$. De maneira equivalente, F é um conjunto de estados fechado se, e somente se,

$$\gamma_{x,y}^{(n)} = 0, \qquad x \in F,\ y \notin F \quad \text{e} \quad n \geq 1\cdot$$

Mais ainda, da condição fraca que $\gamma_{x,y} = 0$, $x \in F$ e $y \notin F$, podemos demonstrar que F seja um conjunto de estados fechado. Se a expressão acima se cumpre, então para $x \in F$ e $y \notin F$ temos que

$$\gamma_{x,y}^{(2)} = \sum_{z \in S} \gamma_{x,z}\gamma_{z,y} = \sum_{z \in F} \gamma_{x,z}\gamma_{z,y} = 0,$$

e a condição $\gamma_{x,y}^{(n)} = 0, x \in F, y \notin F, n \geq 1$ se cumpre por indução. Significa que, se F for um conjunto de estados fechados, então a Cadeia de Markov começando em F, estará em F o tempo todo com probabilidade um. Se a é um estado absorvente então o conjunto $\{a\}$ é fechado.

Definição (Conjunto de estados irredutível).

O conjunto $F \subset S$ é chamado de irredutível se cada estado x se comunica com y, para todos os estados x e y em F.

Deduzimos que se F for um conjunto de estados irredutível fechado; então um ou outro: ou todo estado em F é recorrente ou todo estado em F é transiente.

Teorema 16

Seja F um conjunto irredutível fechado de estados recorrentes. Então,

(a) $\rho_{x,y} = 1,,$

(b) $P_x\big(N(y) = \infty\big) = 1,$

(c) $\mathrm{E}_x\big(N(y)\big) = \infty,$

para todo $x, y \in F$.

Uma Cadeia de Markov irredutível é uma cadeia cujo espaço de estados é irredutível, ou seja, uma cadeia em que cada estado se comunica de volta consigo e também com todos os outros estados. Tal Cadeia de Markov é necessariamente quer uma cadeia transiente ou uma cadeia recorrente. O Teorema acima implica, em particular, que uma Cadeia de Markov irredutível recorrente visita todos seus estados infinitas vezes com probabilidade um.

Teorema 17

Seja F um conjunto finito e fechado de estados irredutíveis. Então cada estado em F é recorrente.

Faremos um resumo dos resultados até agora para Cadeias de Markov com espaço de estados finito. O Teorema 17 nos disse que se a cadeia for irredutível ela deve ser recorrente. Se a cadeia não for irredutível, podemos utilizar os Teoremas 15 e 17 para identificar quais estados são recorrentes e quais são transientes. Com o exemplo a seguir mostramos o procedimento de identificação de estados recorrentes e transientes.

Exemplo

Considere uma Cadeia de Markov com matriz de transição:

$$\Gamma = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Queremos determinar quais estados são recorrentes e quais estados são transientes.

$$\Gamma^{2000} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.1 & 0.03 & 0.27 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0.07 & 0.53 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.08 & 0.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.08 & 0.67 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.08 & 0.67 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exemplo (continuação)

Uma forma de identificar quais estados são transientes e quais recorrentes é calculando uma potência elevada da matriz de transição, por exemplo Γ^{2000}.

Identificamos que os estados 0, 3, 4 e 5 são recorrentes e, por negação do Teorema 15, vemos que se x for recorrente e y transiente, então x não se comunica com y. Justamente é isso que observamos na matriz anterior dos estados 1 e 2, por isso concluímos que estes estados são transientes.

Mais ainda, podemos auxiliarmos do pacote de funções markovchain. Neste pacote, a função transientStates, identifica quais estados são transientes, basta somente digitar:

```
> library(markovchain)
> estados = c("0","1","2","3","4","5")
> Prob.T=matrix(c(1,0,0,0,0,0,1/4,1/2,1/4,0,0,0,0,1/5,2/5,1/5,0,1/5,
          0,0,0,1/6,1/3,1/2,0,0,0,1/2,0,1/2,0,0,0,1/4,0,3/4),
          nrow=6,ncol=6,byrow=T, dimnames=list(estados,estados))
> ProbT = new("markovchain", states=estados, transitionMatrix=Prob.T,
          name="Exemplo 1.24")
```

Exemplo (continuação)

```
> transientStates(ProbT)
"[1]" "1" "2"
```

obtendo como resposta que os estados 1 e 2, nesta situação, são transientes. Também, utilizando a função *steadyStates*, no mesmo pacote, podemos identificar os estados recorrestes digitando:

```
> steadyStates(ProbT)
              0            1            2          3          4          5
"[1,]"  0.2303939 4.092618e-16 2.756485e-16 0.1924015 0.06413384 0.5130707
"[2,]"  1.0000000 0.000000e+00 0.000000e+00 0.0000000 0.00000000 0.0000000
```

Na primeira linha, onde aparecer um valor zero ou próximo de zero significa que o estado correspondente não é recorrente. Ou seja, identificamos que os estados 0, 3, 4 e 5 são recorrentes.

Seja S o espaço de estados de uma Cadeia de Markov. Denotaremos por S_T o conjuntos dos estados transientes em S por S_R o conjunto dos estados recorrentes em S. No Exemplo $S_T = \{1, 2\}$ e $S_R = \{0, 3, 4, 5\}$.

Teorema

Suponha que o conjunto S_R de estados recorrentes em S seja não vazio. Então, S_R é a união finita ou enumerável de conjuntos fechados disjuntos e irredutíveis $S_{R_1}, S_{R_2}, \cdots$.

Podemos usar nossa decomposição do espaço de estados para entender o comportamento de um sistema deste tipo. Se a Cadeia de Markov começa em um dos conjuntos de estados recorrentes fechados irredutíveis S_{R_i}, ela permanece em S_{R_i} para sempre e, com probabilidade um, visita todos os estados S_{R_i} infinitas vezes. Se a Cadeia de Markov começa no conjunto de estados transientes S_T, ou ela permanece em S_T para sempre ou, em algum momento, entra num dos conjuntos S_{R_i} e permanece lá a partir desse momento, mais uma vez visitando todos os estados em S_{R_i} infinitas vezes.

Queremos saber qual a probabilidade de uma cadeia, começando em qualquer estado $x \in S$, chegar a um destes conjuntos fechados irredutíveis de estados recorren-tes?

Sabemos que se $F \subset S$ for um conjunto fechado de estados irredutíveis recorrentes então

$$\rho_{x,F} = P_x(T_F < \infty)$$

é a probabilidade de que uma Cadeia de Markov a partir de x, eventualmente, visite o conjunto F.

Desde que a cadeia continue permanentemente em F, uma vez que atinge este conjunto, chamamos de $\rho_{x,F}$ a probabilidade que uma cadeia a partir de x seja absorvida pelo conjunto F.

Logico que $\rho_{x,F} = 1, x \in F$ e $\rho_{x,F} = 0$ se x for um estado recorrente que não esteja em F. Ele não é tão claro como calcular $\rho_{x,F}$ para $x \in S_T$, o conjunto de estados transientes.

Se houver apenas um número finito de estados transientes e, em particular, se S em si é finito é sempre possível calcular $\rho_{x,F}$, $x \in S_T$ resolvendo um sistema de equações lineares em que há tantas equações como incógnitas, ou seja, os membros de S_T.

Teorema

Suponhamos que o conjunto dos estados transientes S_T seja finito e que F seja o conjunto fechado irredutível dos estados recorrentes da cadeia. Então, o sistema de equações

$$f(x) = \sum_{y\in F} \gamma_{x,y} + \sum_{y\in S_T} \gamma_{x,y} f(y), \qquad x \in S_T,$$

tem por solução única

$$f(x) = \rho_{x,F}, \qquad x \in S_T.$$

Exemplo (Continuação do Exemplo 24).

No Exemplo 24 foi obtido que o conjunto $F = \{0, 2, 4, 5\}$ é de estados recorrentes. Queremos encontrar as probabilidades da cadeia visitar o conjunto F partindo dos estados transientes 1 e 2. Encontremos

$$\rho_{1,0} = \rho_{1,\{0\}} \qquad \text{e} \qquad \rho_{2,0} = \rho_{2,\{0\}}.$$

Da matriz de transição no Exemplo 24, temos que $\rho_{1,0}$ e $\rho_{2,0}$ são determinados pelas equações

$$\rho_{1,0} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\rho_{1,0} + \frac{1}{4}\rho_{2,0} \qquad \text{e} \qquad \rho_{2,0} = \frac{1}{5}\rho_{1,0} + \frac{2}{5}\rho_{2,0}.$$

Resolvendo este sistema encontramos que $\rho_{1,0} = \frac{3}{5}$ e $\rho_{2,0} = \frac{1}{5}$. De maneira similar encontramos que $\rho_{1,\{3,4,5\}} = \frac{2}{5}$ e $\rho_{2,\{3,4,5\}} = \frac{4}{5}$.

Alternativamente, podemos encontrar as probabilidades no exemplo pela subtração de $\rho_{\{0\}}(1)$ e $\rho_{\{0\}}(2)$ de 1, devido a que existe somente um número finito de estados transientes. Isto é possível segundo o teorema a seguir.

Teorema

Seja S_T finito, isto é, o número de estados transientes na Cadeia de Markov é finito. Então,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_{x,F_i} = 1, \qquad x \in S_T,$$

onde $F_1, F_2, \cdots$ é a coleção, finita ou infinita enumerável, de conjuntos disjuntos fechados e irredutíveis de estados recorrentes da cadeia.

Exemplo (continuação).

Da demonstração do Teorema 20, temos que em nosso prévio exemplo

$$\rho_{1,3} = \rho_{1,4} = \rho_{1,5} = \rho_{1,\{3,4,5\}} = \frac{2}{5} \qquad \text{e} \qquad \rho_{2,3} = \rho_{2,4} = \rho_{2,5} = \rho_{2,\{3,4,5\}} = \frac{4}{5},$$

são as probabilidades de atingirmos o estado de conjuntos recorrentes $F = \{3, 4, 5\}$ a partir dos estados transientes.

Definição (Cadeias absorventes)

Uma Cadeia de Markov é absorvente se tiver pelo menos um estado absorvente e se, a partir de cada estado, é possível ir para um estado absorvente.

A pergunta mais óbvia que pode ser feita sobre a cadeia é: Qual é a probabilidade do processo vai eventualmente atingir um estado absorvente? Outras questões interessantes incluem: (a) Qual é a probabilidade de que o processo vai acabar em um determinado estado absorvente? (b) Em média, quanto tempo será necessário para que o processo seja absorvido? (c) Em média, quantas vezes o processo estará, em cada estado transiente? As respostas a todas estas questões dependem, em geral, no estado a partir do qual o processo é iniciado, bem como as probabilidades de transição.

O seguinte exemplo têm como base o artigo de Sox, H., Blatt, M., Higgins, M. e Marton, K. de 1988 publicado na Medical Decision Making, Butterworth Publishing, Boston nas páginas 191 a 193.

Exemplo (Gestão de cálculos biliares).

Os médicos que diagnosticam cálculos biliares assintomáticos são confrontados com a decisão: remover imediatamente a vesícula biliar para evitar possíveis complicações com risco de vida ou adiar a cirurgia até que as complicações ocorram. Qual é a tendência de longo prazo de cada estratégia?

Suponha que, na muito simplificada a estratégia de adiar a cirurgia, o paciente vai continuar a ter cálculos biliares assintomáticos (estado A) num período de 4 meses para o próximo com probabilidade 0,95. Uma das duas principais complicações (estado C), colecistite ou complicações biliares, podem surgir necessitando de cirurgia, com probabilidade de 0,04. Por causa da idade específica do paciente, ele terá probabilidade 0,01 de morte natural (estado D).

Se a doença evoluir e se tornar sintomática, em seguida será realizada a cirurgia, com um risco de morte de 0,005 devido a complicações devido a esta. Uma vez bem sucedida a cirurgia realizada, o paciente entra em estado de recuperação (estado R). Noventa por cento dos pacientes passam para o estado bom (W), enquanto 9% permanecem no estado de recuperação de cada ano e 1% morrem de causas naturais. Uma vez que um paciente entra no estado bom, ele continua lá até a morte, com probabilidade de 0,99.

Exemplo (Gestão de cálculos biliares, continuação)

A matriz a seguir é a matriz de transição de probabilidades para a estratégia de adiar a cirurgia até que ocorram complicações.

$$\Gamma = \begin{array}{c} \\ A \\ C \\ R \\ W \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & C & R & W & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.95 & 0.04 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0.995 & 0 & 0.005 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0.90 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0.99 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Observemos que o estado D é absorvente. Uma vez que o paciente chega a este estado é impossível sair. Para entendermos as consequências da estratégia a longo prazo vamos encontrar várias potências da matriz de transição. Assim

$$\Gamma^8 = \begin{array}{c} \\ A \\ C \\ R \\ W \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & C & R & W & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.66 & 0.03 & 0.03 & 0.20 & 0.08 \\ 0 & 0 & 0 & 0.93 & 0.07 \\ 0 & 0 & 0 & 0.92 & 0.08 \\ 0 & 0 & 0 & 0.92 & 0.08 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo (Gestão de cálculos biliares, continuação)

$$\Gamma^{32} = \begin{array}{c} \\ A \\ C \\ R \\ W \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & C & R & W & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.19 & 0.01 & 0.01 & 0.51 & 0.27 \\ 0 & 0 & 0 & 0.73 & 0.27 \\ 0 & 0 & 0 & 0.72 & 0.28 \\ 0 & 0 & 0 & 0.72 & 0.28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Quando Γ é elevada a potências mais e mais elevadas, o sistema tenderá para o estado absorvente de modo que com probabilidade 1 os pacientes acabarão por morrer.

Propriedades sugeridas de Cadeias de Markov absorventes:

1- Independentemente do estado original, em um número finito de etapas da cadeia vai entrar em um estado absorvente e, em seguida, ficar nesse estado.

2- Os potências da matriz de transição chegam mais e cada vez mais perto de alguma matriz especial.

3- A tendência de longo prazo depende do estado inicial, a alteração do estado inicial pode alterar o resultado final.

Esta é mais uma situação de cadeias na qual não exitem estados transientes.

Definição (Cadeia de Markov regular).

Uma Cadeia de Markov é chamada uma cadeia regular, se alguma potencia da matriz de transição tem apenas elementos positivos.

Em outras palavras, numa cadeia regular, para algum n é possível ir de qualquer estado para qualquer estado em exatamente n passos.

Exemplos de Cadeia de Markov não regulares são as cadeias absorventes. Por exemplo, seja

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a matriz de transição de uma Cadeia de Markov. Todas as potências Γ terão um 0 no canto superior direito.

Teorema (Teorema Fundamental)

Seja Γ a matriz de transição de uma Cadeia de Markov regular. Então,

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma^n = W,$$

onde W é uma matriz com todas as linhas iguais ao mesmo vetor w. O vector w é um vector de probabilidades estritamente positivo, isto é, as componentes são todas positivas e somam um.

Exemplo (Terra de Oz)

A potência sexta da matriz de transição Γ é, com três casas decimais,

$$\Gamma^6 = \begin{array}{c} \\ C \\ B \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & B & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

O Teorema Fundamental prevê que, para grandes valores de n, as linhas de Γ^n vão se aproximar de um vetor comum. É interessante que isso ocorra tão cedo neste exemplo.