Modelos Markovianos

Trabalho No.1

Entregar até o dia 25 de outubro de 2021.

1- Suponha que a profissão de um homem pode ser classificada como profissional, trabalhador qualificado ou operário não qualificado. Suponha que, dos filhos de homens profissionais, 80 por cento são profissionais, 10 por cento são trabalhadores qualificados e 10 por cento são trabalhadores não qualificados. No caso dos filhos de operários especializados, 60 por cento são hábeis trabalhadores qualificados, 20 por cento são profissionais e 20 por cento são trabalhadores não qualificados. Finalmente, no caso de trabalhadores não qualificados, 50 por cento dos filhos são trabalhadores não qualificados e 25 por cento em cada um são as chances das outras duas categorias. Suponha que cada homem tem pelo menos um filho e que seguindo a profissão de um filho escolhido aleatoriamente de uma determinada família através de várias gerações temos definida uma Cadeia de Markov. Configure a matriz de probabilidades de transição. Encontre a probabilidade de que um neto escolhido aleatoriamente de um trabalhador não qualificado seja um homem profissional.

2- Seja $\{X_n : n \geq 0\}$ uma Cadeia de Markov. Mostre que

$$P(X_0 = x_0 | X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = P(X_0 = x_0 | X_1 = x_1)\cdot$$

3- Uma Cadeia de Markov a três estados tem a seguinte como matriz de probabilidades de transição:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Qual é o valor aproximado de $p_{1,3}^{(100)}$? Que interpretação você dá a esse resultado?

b) Qual é a probabilidade de que após o terceiro passo a cadeia esteja no estado 3 se o vector de probabilidades inicial é $(1/3, 1/3, 1/3)$?

4- Considere como espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, \cdots, 6\}$ de uma Cadeia de Markov com matriz de transição

$$\mathcal{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

a) Determine quais estados são transientes e quais recorrentes.

b) Encontre $\rho_{0,y}$, para $y = 0, \cdots, 6$.

5- Num estudo com homens criminosos em Filadélfia descobriram que a probabilidade de que um tipo de ataque seja seguido por um outro tipo pode ser descrito pela seguinte matriz de transição[1].

$$\mathcal{P} = \begin{array}{l} \\ \text{Outro} \\ \text{Injúria} \\ \text{Roubo} \\ \text{Dano} \\ \text{Misto} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Outro} & \text{Injúria} & \text{Roubo} & \text{Dano} & \text{Misto} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.645 & 0.099 & 0.152 & 0.033 & 0.071 \\ 0.611 & 0.138 & 0.128 & 0.033 & 0.090 \\ 0.514 & 0.067 & 0.271 & 0.030 & 0.118 \\ 0.609 & 0.107 & 0.178 & 0.064 & 0.042 \\ 0.523 & 0.093 & 0.183 & 0.022 & 0.179 \end{pmatrix} \end{array}.$$

a) Para um criminoso que comete roubo, qual é a probabilidade de que o seu próximo crime também seja um roubo?

b) Para um criminoso que comete roubo, qual é a probabilidade de que seu segundo crime depois do atual também seja um roubo?

c) Se essas tendências continuarem, quais são as probabilidades de longo prazo para cada tipo de crime?

[1] Stander, Julian, et al. (1989). "Markov Chain Analysis and Specialization in Criminal Careers". The British Journal of Criminology, Vol.29, No.4, pp.319-335.

6- Considere uma Cadeia de Markov com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ e matriz de probabilidades de transição

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Mostre que esta cadeia tem uma única distribuição estacionária π e encontre-a.

7- Considere uma Cadeia de Markov sendo $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ o espaço de estados e com matriz de probabilidades de transição

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

a) Mostre que esta é uma cadeia irredutível.

b) Encontre o período.

c) Encontre a distribuição estacionária.