

# Modelos Markovianos

---

## Trabalho No.2

Entregar até o dia 13 de junho de 2023.

---

1- Considere a integral

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e - 1} dx. \quad (1)$$

- (a) Faça um cálculo direto da integral em (1). Pode ser utilizado algum procedimento automatizado de integração teórica, como WolframAlpha (<https://www.wolframalpha.com/>).
- (b) Utilize integração Monte Carlo para encontrar um valor aproximado da expressão em (1). Calcule a variância amostral do estimador utilizado. Compare o valor estimado com o valor teórico apresentado em (a).
- (c) Usando amostragem de importância calcule aproximadamente a integral em (1), com função de importância  $g(x) = x$ , e determine a variância do estimador de amostragem de importância.

2- A distribuição normal padrão truncada em zero é aquela onde

$$X | X > 0 \sim N(0, 1).$$

- (a) Encontre a expressão da função de densidade desta distribuição, a distribuição normal truncada no zero. Um documento de consulta pode ser acessado em:

<http://leg.ufpr.br/~lucambio/SSim/DTA.pdf>

- (b) Considere a implementação do algoritmo Aceitar-Rejeitar e calcule a eficiência  $M$  da amostra rejeitada da proposta  $Y \sim Exp(1)$ .

3- A densidade  $t$ -Student com  $\nu$  graus de liberdade,  $T_\nu$ , é dada por

$$f(x|\nu) = \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} (1 + x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}.$$

Calcule a média da distribuição com  $\nu = 4$  graus de liberdade usando um algoritmo Metropolis-Hastings com densidade de candidatos

(a)  $N(0, 1)$ .

(b)  $t$ -Student com  $\nu = 2$  graus de liberdade.

Em cada caso, monitore a convergência entre as iterações.

4- Considere a distribuição alvo normal  $N_p(0, (1 - \rho)\mathbf{I} + \rho\mathbf{J})$ , ou seja, distribuição Normal de ordem  $p$  com coeficientes de correlação  $\rho$ . Escreva um amostrador de Gibbs usando as distribuições condicionais fornecidas no Exemplo 7.4. Execute seu código R para  $p = 5$  e  $\rho = 0.25$  e verifique graficamente se os marginais são todas  $N(0, 1)$ .