

Estatística não paramétrica

Procedimentos de amostra única e com amostras pareadas

Fernando Lucambio

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Abril de 2025

No problema geral de uma amostra, os dados disponíveis consistem em um único conjunto de observações, geralmente uma amostra aleatória, de uma função de distribuição F_X da qual as inferências podem ser baseadas em algum aspecto.

Os testes de aleatoriedade referem-se a inferências sobre uma propriedade da distribuição conjunta de um conjunto de observações que são distribuídas identicamente, mas possivelmente dependentes. A hipótese em um estudo de adequação do ajuste diz respeito à distribuição populacional univariada a partir da qual um conjunto de variáveis independentes é desenhado.

Essas hipóteses são tão gerais que não existem contrapartes análogas no domínio da estatística paramétrica. Assim, esses problemas são mais adequados para serem vistos em procedimentos não paramétricos.

Em um problema clássico de inferência de uma amostra, os dados de amostra única são usados para obter informações sobre algum aspecto particular da distribuição da população, geralmente um ou mais dos seus parâmetros.

Técnicas não paramétricas são úteis aqui também, particularmente quando um parâmetro de locação é de interesse.

Estamos interessados em procedimentos não-paramétricos análogos ao teste de média, com variância conhecida, ou o teste t -Student quando a variância é desconhecida para as hipóteses

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{e} \quad H_0 : \mu_X - \mu_Y = \mu_D = 0,$$

para os problemas de amostra única e amostras pareadas, respectivamente.

Os testes clássicos são derivados sob a suposição de população única ou população das diferenças de pares ser normal. Para os testes não paramétricos, no entanto, apenas hipóteses de continuidade sobre as populações precisam ser postuladas para determinarmos as distribuições amostrais das estatísticas de teste.

As hipóteses aqui estão preocupadas com a mediana ou algum outro quantil em vez da média como o parâmetro de locação, mas tanto a média quanto a mediana são bons índices de tendência central e eles coincidem para populações simétricas. Em qualquer população, a mediana sempre existe o que não é verdade para a média e é mais robusta como uma estimativa de locação.

Os procedimentos cobertos aqui incluem intervalos de confiança e testes de hipóteses sobre qualquer quantil.

O caso da mediana é tratado separadamente e o teste de sinais assim como o teste dos postos sinalizados de Wilcoxon são apresentados.

A discussão completa em cada caso será dada apenas para uma amostra caso, uma vez que com dados de amostras pareadas, uma vez que as observações são formadas, temos essencialmente apenas uma única amostra extraída da população de diferenças e, portanto, os métodos de análise são idênticos.

Lembremos que um quantil de uma variável aleatória contínua X é um número real que divide a área sob a função de densidade em duas partes de quantidades especificadas. Somente a área à esquerda do número precisa ser especificada, já que a área inteira é igual a 1.

Seja F_X a função de distribuição e seja κ_p , para todo $0 < p < 1$, p -ésimo quantil ou o quantil de ordem p de F_X . Assim, κ_p é definido como qualquer número real que seja uma solução para a equação

$$F_X(\kappa_p) = p$$

ou $\kappa_p = Q_X(p) = F_X^{-1}(p)$.

Vamos supor existe uma solução única, como seria o caso de uma função estritamente crescente F_X . Por exemplo, $\kappa_{0.50}$ é a mediana da distribuição, uma medida de tendência central.

Primeiro, consideramos o problema de encontrar um intervalo de confiança para κ_p , dada uma amostra aleatória X_1, \dots, X_n da função de distribuição F_X . Como discutido, uma estimativa pontual natural de κ_p seria o p -ésimo quantil amostral, que é a estatística de ordem np , desde claro, que np seja um inteiro. Por exemplo, como o $100p$ por cento dos valores da população são menores ou iguais ao p -ésimo quantil populacional a estimativa de κ_p é o valor de uma amostra aleatória de modo que $100p$ por cento da amostral sejam menores ou iguais a ela.

Definamos $X_{(r)}$ como sendo o p -ésimo quantil amostral onde r é definido como

$$r = \begin{cases} np & \text{se } np \text{ é um inteiro} \\ [np + 1] & \text{se } np \text{ não é um inteiro} \end{cases}$$

e $[x]$ denota o maior número inteiro que não excede x .

Esta é apenas uma convenção adotada para que possamos lidar com situações em que np não é um inteiro. Outras convenções são por vezes adotadas.

No nosso caso, o p -ésimo quantil amostral $Q_X(p)$ é igual a $X_{(np)}$ se np for um inteiro, e $X_{([np+1])}$ se np não for um inteiro.

Uma estimativa pontual não é suficiente para fins de inferência. Sabemos que a estatística de ordem r é um estimador consistente do p -ésimo quantil de uma distribuição quando $n \rightarrow \infty$ e $r/n \rightarrow p$. No entanto, a consistência é apenas uma propriedade em amostras grandes.

Gostaríamos de um procedimento para a estimativa do intervalo de κ_p que nos permita anexar um coeficiente de confiança à nossa estimativa para um tamanho de amostra dado finito. Uma escolha lógica para os extremos do intervalo de confiança são as estatísticas de ordem, digamos $X_{(r)}$ e $X_{(s)}$, sendo $r < s$, obtidas da amostra aleatória extraída da população F_X . Para encontrar o intervalo de confiança $100(1 - \alpha)\%$, devemos então encontrar os dois inteiros r e s , $1 \leq r < s \leq n$ tais que

$$P(X_{(r)} < \kappa_p < X_{(s)}) = 1 - \alpha,$$

para algum dado número $0 < \alpha < 1$.

A quantidade $1 - \alpha$, que denotamos por γ , é chamado de nível de confiança ou coeficiente de confiança. Agora o evento $X_{(r)} < \kappa_p$ ocorre se, e somente se, $X_{(r)} < \kappa_p < X_{(s)}$ ou $\kappa_p > X_{(s)}$ e esses dois últimos eventos são claramente mutuamente exclusivos.

Portanto, para todos os $r < s$,

$$P(X_{(r)} < \kappa_p) = P(X_{(r)} < \kappa_p < X_{(s)}) + P(\kappa_p > X_{(s)})$$

ou equivalentemente

$$P(X_{(r)} < \kappa_p < X_{(s)}) = P(X_{(r)} < \kappa_p) - P(X_{(s)} < \kappa_p).$$

Desde que assumimos que F_X é uma função estritamente crescente

$$X_{(r)} < \kappa_p \quad \text{se, e somente se,} \quad F_X(X_{(r)}) < F_X(\kappa_p) = p.$$

Mas quando o F_X é contínua, a distribuição de probabilidade da variável aleatória $F(X_{(r)})$ é a mesma que a de $U_{(r)}$, a r -ésima estatística de ordem a partir da distribuição uniforme ao longo do intervalo $(0,1)$.

Além disso, como $F_X(\kappa_p) = p$ pela definição de κ_p , temos

$$\begin{aligned} P(X_{(r)} < \kappa_p) &= P(F_X(X_{(r)}) < p) \\ &= \int_0^p \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} x^{r-1} (1-x)^{n-r} dx. \end{aligned}$$

Assim, enquanto a distribuição da r -ésima estatística de ordem depende da distribuição da população F_X , a probabilidade acima não. Podemos então obter um intervalo de confiança livre de distribuição.

Claramente, esta equação não dará uma solução única para os dois desconhecidos r e s e condições adicionais são necessárias.

Por exemplo, se quisermos o intervalo mais estreito possível para um coeficiente de confiança fixo, r e s devem ser escolhidos de tal forma que a relação acima seja satisfeita e $X_{(s)} - X_{(r)}$ ou $E|X_{(s)} - X_{(r)}|$ seja o menor possível. Alternativamente, poderíamos minimizar $s - r$.

Contudo, $P(X_{(r)} < \kappa_p)$ pode ser expresso de outra forma após a integração por partes segue:

$$\begin{aligned} P(X_{(r)} < \kappa_p) &= \int_0^p n \binom{n-1}{r-1} x^{r-1} (1-x)^{n-r} dx \\ &= \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} + \binom{n}{r+1} p^{r+1} (1-p)^{n-r-1} + \\ &\quad n \binom{n-1}{r+1} \int_0^p x^{r+1} (1-x)^{n-r-2} dx. \end{aligned}$$

Depois de repetir essa integração por partes nr vezes, e substituindo $r + j = i$

$$P(X_{(r)} < \kappa_p) = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Nesta forma final, a integral em é expressa como a soma dos últimos $n - r + 1$ termos da distribuição binomial com os parâmetros n e p . Assim, a probabilidade $P(X_{(r)} < \kappa_p < X_{(s)})$ pode ser expressa como

$$\begin{aligned} P(X_{(r)} < \kappa_p < X_{(s)}) &= \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} - \sum_{i=s}^n p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = P(r \leq K \leq s-1), \end{aligned}$$

onde K tem distribuição binomial com os parâmetros n e p .

Esta forma é provavelmente o mais fácil de usar na escolha de r e s tal que $s - r$ seja mínimo para α fixo. Note que a partir da expressão acima está claro que esta probabilidade não depende da função de distribuição subjacente, desde que seja contínua. O intervalo de confiança resultante é, portanto, livre de distribuição.

Para encontrar o intervalo de confiança para κ_p com base em estatísticas bilaterais, o lado direito de acima é igual a $1 - \alpha$ e a busca por r e s é iniciada. Por causa da distribuição binomial ser discreta, o nível de confiança nominal exato frequentemente não pode ser alcançado. Nesses casos, o nível de confiança requerido pode ser alterado de "igual a" para "pelo menos igual a" $1 - \alpha$. Geralmente denotamos $\gamma \geq 1 - \alpha$ como o nível de confiança exato

Note que para qualquer p , o evento $X_{(r)} < \kappa_p$ ocorre se, e somente se, pelo menos r dos n valores da amostra, X_1, X_2, \dots, X_n , são menores que κ_p . Portanto

$$P(X_{(r)} < \kappa_p) = P(\text{exato } r \text{ das } n \text{ observações são } > \kappa_p) + \\ + P(\text{exato } r + 1 \text{ das } n \text{ observações são } < \kappa_p) + \\ \dots + P(\text{exato } n \text{ das } n \text{ observações são } < \kappa_p),$$

Em outras palavras

$$P(X_{(r)} < \kappa_p) = \sum_{i=r}^n P(\text{exatamente } i \text{ das } n \text{ observações são } < \kappa_p).$$

Esta é uma observação chave. Agora, a probabilidade de que exatamente i das n observações sejam menores que κ_p pode ser encontrada como a probabilidade de i sucessos em n tentativas independentes de Bernoulli, já que as observações da amostra são todas independentes e cada observação pode ser classificada como um sucesso ou uma falha, onde um sucesso é definido como qualquer observação sendo menor que κ_p .

A probabilidade de sucesso é $P(X_i < \kappa_p) = p$. Assim, a probabilidade requerida é dada pela probabilidade binomial com os parâmetros n e p . Em outras palavras,

$$P(\text{exato } i \text{ das } n \text{ observações são } < \kappa_p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Em resumo, o intervalo de confiança com nível de confiança $(1 - \alpha)100$ para o p -ésimo quantil é dado por $(X_{(r)}, X_{(s)})$, onde r e s são inteiros tais que $1 \leq r < s \leq n$ e

$$P(X_{(r)} < \kappa_p < X_{(s)}) = \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \geq 1 - \alpha.$$

Como indicado anteriormente, sem uma segunda condição, os pontos finais do intervalo de confiança não serão exclusivos. Uma abordagem comum neste caso é atribuir a probabilidade $\alpha/2$ em cada cauda, direita e esquerda. Isso produz o chamado intervalo de "igualdade de caudas", onde r e s são os maiores e menores inteiros $1 \leq r < s \leq n$ respectivamente, de tal forma que

$$\sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \leq \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$$

respectivamente.

Essas equações são úteis desde que sejam fornecidas probabilidades binomiais acumuladas. O nível de confiança exato é encontrado como

$$\sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} - \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \gamma.$$

Se o tamanho da amostra for maior que 20 e, portanto, podemos usar a aproximação normal para a distribuição binomial com uma correção de continuidade. As soluções são

$$r = np + 0.5 - z_{\alpha/2} \sqrt{np(1-p)} \quad \text{e} \quad s = np + 0.5 + z_{\alpha/2} \sqrt{np(1-p)}$$

onde $z_{\alpha/2}$ satisfaz $\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$. Arredondamos o resultado de r acima para o inteiro mais próximo e arredondamos o resultado de s acima para cima, para ser conservador ou para tornar o nível de confiança ao menos $1 - \alpha$.

Exemplo

Suponha $n = 10$, $p = 0.35$ e $1 - \alpha = 0.95$. Caso $r - 1 = 0$ e $s - 1 = 7$, fazendo $r = 1$ e $s = 8$. O intervalo de confiança para o quantil 0.35 é

$$(X_{(1)}, X_{(8)})$$

com nível de confiança exato igual a $0.99520.0135=0.9817$.

```
> dbinom(0, 10, prob = 0.35)
[1] 0.01346274
> sum(dbinom(c(0:7), 10, prob = 0.35))
[1] 0.9951787
> sum(dbinom(c(0:7), 10, prob=0.35))-dbinom(0, 10, prob=0.35)
[1] 0.981716
```

Exemplo

A aproximação normal dá $r = 1$ e $s = 7$ com nível de confiança aproximado de 0.95.

```
> n = 10; p = 0.35  
> n*p + 0.5 - qnorm(0.975)*sqrt(n*p*(1-p))  
[1] 1.043766  
> n*p + 0.5 + qnorm(0.975)*sqrt(n*p*(1-p))  
[1] 6.956234
```

Dada a estatística de ordem $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ de F_X não especificada, uma hipótese nula relativa ao valor do p -ésimo quantil é escrita como

$$\kappa_p = \kappa_p^0,$$

onde κ_p^0 e p são ambos especificados.

Sob H_0 , como κ_p^0 é o p -ésimo quantil de F_X , temos, por definição $P(X \leq \kappa_p^0) = p$ e, portanto, esperamos que cerca de np das observações amostrais sejam menores que κ_p^0 se H_0 for verdadeira.

Se o número real de observações amostrais menores que κ_p^0 for consideravelmente menor que np , os dados sugerem que o verdadeiro p -ésimo quantil é maior que κ_p^0 ou há evidência contra H_0 em favor da alternativa unilateral de cauda superior

$$H_1 : \kappa_p \geq \kappa_p^0.$$

Isto implica que é razoável rejeitar H_0 em favor de H_1 se, no máximo, $r - 1$ observações amostrais são menores que κ_p^0 , para alguns r .

Agora, se no máximo $r - 1$ observações amostrais são menores que κ_p^0 , então deve ser verdade que a estatística de ordem $X_{(r)}$ amostral satisfaz $X_{(r)} > \kappa_p^0$. Portanto, uma região de rejeição apropriada Ω_1 é

$$X_{(r)} \in \Omega_1, \quad \text{para} \quad X_{(r)} > \kappa_p^0.$$

Para um nível de significância especificado α , o inteiro r deve ser escolhido de forma que

$$P(X_{(r)} > \kappa_p^0 | H_0) = 1 - P(X_{(r)} \leq \kappa_p^0 | H_0) \leq \alpha$$

ou r é o maior inteiro tal que

$$1 - \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \leq \alpha.$$

Agora expressamos a região de rejeição em outra forma para ser consistente com nossa apresentação posterior para o teste de sinais.

Definamos a variável aleatória K como o número total de sinais positivos entre as diferenças $X_{(i)} - \kappa_p^0$ ou seja, o número de diferenças positivas. Então a região de rejeição pode ser equivalente declarada como

$$K \in \Omega_1 \quad \text{para} \quad K \geq n - r + 1.$$

As diferenças $X_i - \kappa_p^0$, $i = 1, 2, \dots, n$, são variáveis aleatórias independentes, cada uma tendo um sinal de mais ou menos e a probabilidade de um sinal de mais sob H_0 é

$$P(X_i - \kappa_p^0 > 0) = P(X_i > \kappa_p^0) = 1 - p.$$

Portanto, como K é o número de sinais positivos, podemos escrever

$$K = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(X_i > \kappa_p^0),$$

onde $\mathbf{1}(X_i > \kappa_p^0) = 1$ quando o evento A ocorre e é 0 caso contrário.

Da discussão anterior, as variáveis indicadoras $\mathbf{1}(X_i > \kappa_p^0)$, $i = 1, 2, \dots, n$ são variáveis aleatórias independentes com função de probabilidade Bernoulli($1-p$) sob H_0 .

Assim, sob H_0 , a distribuição de K é Binomial($n, 1p$) e so r devem ser escolhidos para satisfazer

$$P(K \geq n - r + 1 | H_0) = \sum_{i=n-r+1}^n \binom{n}{i} (1-p)^i p^{n-i} \leq \alpha.$$

Por outro lado, se muito mais do que np observações são menores que κ_p^0 , há suporte contra H_0 em favor da alternativa unilateral de cauda inferior $H_1 : \kappa < \kappa_p^0$. Então devemos rejeitar H_0 se o número de observações amostrais menores que κ_p^0 for pelo menos, digamos s . Isso leva à região de rejeição

$$X_{(s)} \in \Omega_1 \quad \text{para} \quad X_{(s)} < \kappa_p^0,$$

mas isso equivale a dizer que o número de observações maiores que κ_p^0 deve ser no máximo $n - s$.

Assim, com base na estatística K , definida antes como o número de diferenças positivas, a região de rejeição apropriada para a alternativa unilateral de cauda inferior $H_1 : \kappa_p < \kappa_p^0$ é

$$K \in \Omega_1 \quad \text{para} \quad K \leq n - s,$$

onde s é o maior número inteiro tal que

$$P(K \leq n - s | H_0) = \sum_{i=0}^{n-s} \binom{n}{i} (1-p)^i p^{n-i} \leq \alpha.$$

Para a alternativa bilateral $H_1 : \kappa_p \neq \kappa_p^0$, a região de rejeição consiste na união das duas partes especificadas acima,

$$K \in \Omega_1 \quad \text{para} \quad K \leq n - s \quad \text{ou} \quad K \geq n - r + 1,$$

onde r e s são inteiros tais que a probabilidade associada é menor ou igual a $\alpha/2$.

Exemplo

O Educational Testing Service relata que o percentil 0.75 para a pontuação na parte quantitativa do Graduate Record Examination (GRE) é de 693 em um determinado ano.

Uma amostra aleatória de 15 estudantes de pós-graduação do primeiro ano com estatísticas reportam seus escores quantitativos de GRE como 690, 750, 680, 700, 660, 710, 720, 730, 650, 670, 740, 730, 660, 750 e 690. As pontuações dos alunos estão se formando em estatísticas consistentes com o valor do percentil 0.75 para este ano?

A questão neste exemplo pode ser respondida por um teste de hipótese ou por uma abordagem de intervalo de confiança. Ilustramos as duas abordagens ao nível de confiança 0.05.

Aqui estamos interessados no quantil 0.75, o terceiro quartil, de modo que $p = 0.75$ de valor hipotético $\kappa_{0.75}^0 = 693$.

Assim, a hipótese nula $H_0 : \kappa_{0.75} = 693$ deve ser testada contra $H_1 : \kappa_{0.75} \neq 693$.

O valor da estatística é $K = 8$, uma vez que há oito diferenças positivas entre $X_i - 693$ e a região de rejeição bilateral é $K \in \Omega_1$ para $K \leq n - s$ ou $K \geq n - r + 1$, onde r e s são os maiores inteiros que satisfazem as restrições com $\alpha = 0.025$.

```
> pbinom(8, 15, 0.25)
[1] 0.995807
> 1-pbinom(7, 15, 0.25)
[1] 0.01729984
```

Para encontrar o p -valor, observe que a alternativa é bilateral e, portanto, precisamos encontrar as duas probabilidades unilaterais primeiro.

Usando que $n = 15$ e $p = 0.25$ encontramos

$$P(K \leq 8 | H_0) = 0.9958 \text{ e } P(K \geq 8 | H_0) = 1 - 0.9827 = 0.0173.$$

Tomando o menor desses dois valores e multiplicando por 2, o p -valor é 0.0346, o qual sugere rejeitar a hipótese nula.

Os procedimentos de teste de sinais de uma amostra para teste de hipóteses e estimação por intervalo de confiança de M são igualmente aplicáveis a dados de amostras pareadas.

Para uma amostra aleatória $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, construímos as n diferenças $D_i = X_i - Y_i$. Se a população das diferenças é assumida contínua na sua mediana M_D , de modo que $P(D = M_D) = 0$ e é definida como $\theta = P(D > M_D)$, os mesmos procedimentos são claramente válidos aqui com X_i substituído em todo lugar por D_i .

Deve ser enfatizado que este é um teste para a diferença mediana M_D , que não é necessariamente a mesma que a diferença das duas medianas M_X e M_Y . O exemplo simples a seguir servirá para ilustrar esse fato muitas vezes mal compreendido.

Seja a função de densidade conjunta de X e Y

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/2, & \text{caso } y-1 \leq x \leq y, & -1 \leq y \leq 1 \\ & \text{ou } y+1 \leq x \leq 1, & -1 \leq y \leq 0 \\ 0, & \text{caso } \textit{contrrio} \end{cases} .$$

Então X e Y são uniformemente distribuídos sobre a região sombreada na figura abaixo. Pode ser visto que as distribuições marginais de X e Y são idênticas, ambas sendo uniformes no intervalo $(-1,1)$, de modo que $M_X = M_Y = 0$.

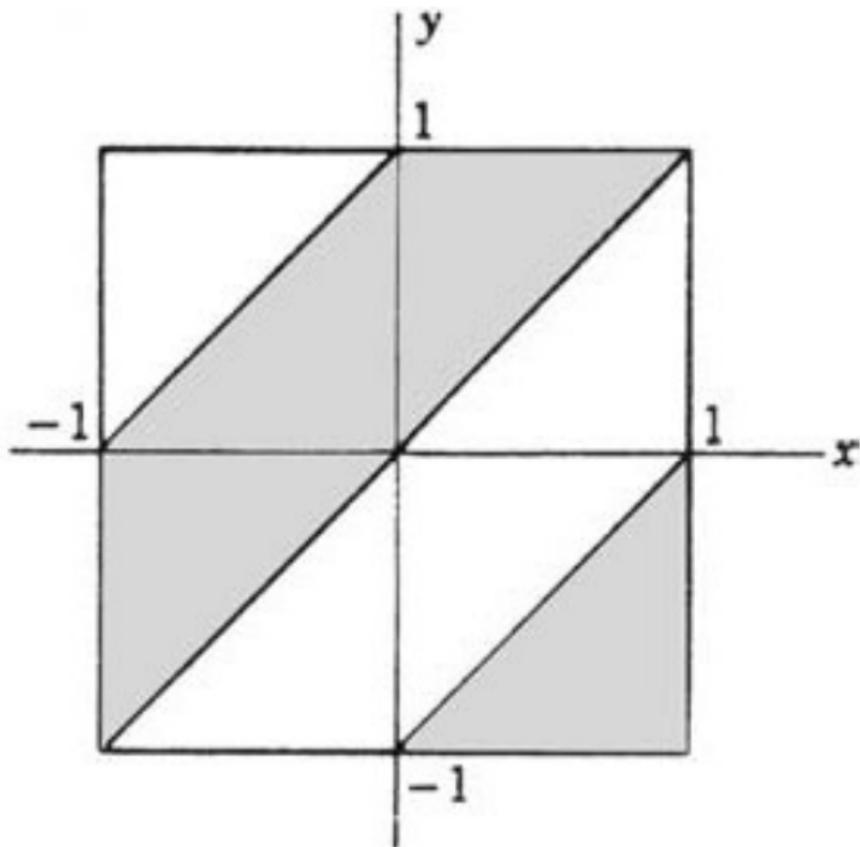
É claro que onde X e Y têm sinais opostos, nos quadrantes II e IV,

$$P(X < Y) = P(X > Y),$$

enquanto nos quadrantes I e III, $X < Y$ sempre.

Para todos os pares, então, temos $P(X < Y) = 3/4$, o que implica que a mediana da população das diferenças é menor que zero. A função de distribuição da variável aleatória diferença $D = X - Y$ é

$$F_D(d) = \begin{cases} 0, & \text{caso } d \leq -1 \\ \frac{(d+1)(d+3)}{4}, & \text{caso } -1 < d \leq 0 \\ \frac{3}{4}, & \text{caso } 0 < d \leq 1 \\ \frac{d(4-d)}{4}, & \text{caso } 1 < d \leq 2 \\ 1, & \text{caso } d \geq 2 \end{cases} .$$



A diferença mediana é o valor M_D , da distribuição de D , tal que $F_D(M_D) = 1/2$. Pode-se verificar que isso produz $M_D = -2 + \sqrt{3}$.

Em geral, então, não é verdade que $M_D = M_X - M_Y$. Por outro lado, é verdade que a média das diferenças é igual à diferença das médias. Como a média e a mediana coincidem para as distribuições simétricas, se as populações X e Y forem simétricas e $M_X = M_Y$ e se a população das diferenças também é simétrica.

A população das diferenças é simétrica se X e Y forem simétricos e independentes ou se $f_{X,Y}(x, y) = f_{X,Y}(-x, -y)$. Então $M_D = M_X - M_Y$ e $M_X = M_Y$ são uma condição necessária e suficiente para $M_D = 0$.

Exemplo

Alguns pesquisadores afirmam que a suscetibilidade à hipnose pode ser adquirida ou melhorada através do treinamento.

Para investigar essa alegação, seis sujeitos foram avaliados em uma escala de 1 a 20, de acordo com sua suscetibilidade inicial à hipnose e, em seguida, receberam 4 semanas de treinamento.

Cada indivíduo foi avaliado novamente após o período de treinamento. Nas avaliações abaixo, números mais altos representam maior suscetibilidade à hipnose. Esses dados suportam a suposição?

```
> antes = c(10, 16, 7, 4, 7, 2)
> depois = c(18, 19, 11, 3, 5, 3)
> t.test(antes, depois, paired=TRUE)
```

Paired t-test

```
data: antes and depois
t = -1.4516, df = 5, p-value = 0.2063
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -6.003451  1.670117
sample estimates:
mean of the differences
      -2.166667
```

Uma vez que o p valor=0.2063 falhamos em rejeitar H_0 .