Definições de probabilidade e regra da adição

Prof. Wagner Hugo Bonat

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Definições

Definição axiomática de probabilidade

Probabilidade é uma função $\mathrm{P}(\cdot)$ que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral, de tal forma que

1. $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1, \quad \forall A \in \Omega$;
2. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;
3. $\mathrm{P}(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A_j)$, com os A_j's disjuntos.

A pergunta que surge é: Como atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral?

- Notação: $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A_j) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n)$.

Definições de probabilidade

Existem pelo menos três maneiras principais de atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral:

1. (**Clássica**) baseia-se nas características teóricas da realização do fenômeno.
   - Considerando o lançamento de um dado, temos $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
   - Admitindo que o dado é honesto, podemos assumir que $P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = 1/6$.
2. (**Frequentista**) baseia-se nas frequências (relativas) de ocorrência do fenômeno.
   - Determinar a probabilidade de ocorrência de cada face de um dado.
   - Sem fazer nenhuma suposição inicial, podemos usar as **frequências relativas** de sucessivas ocorrências.
3. (**Subjetiva**) baseia-se no julgamento pessoal ou experiência própria sobre a plausibilidade/chance de algo ocorrer.

Definição frequentista

Podemos então pensar em repetir o experimento aleatório n vezes, e contar quantas vezes o evento A ocorre, $n(A)$.

Dessa forma, a frequência relativa de A nas n repetições será

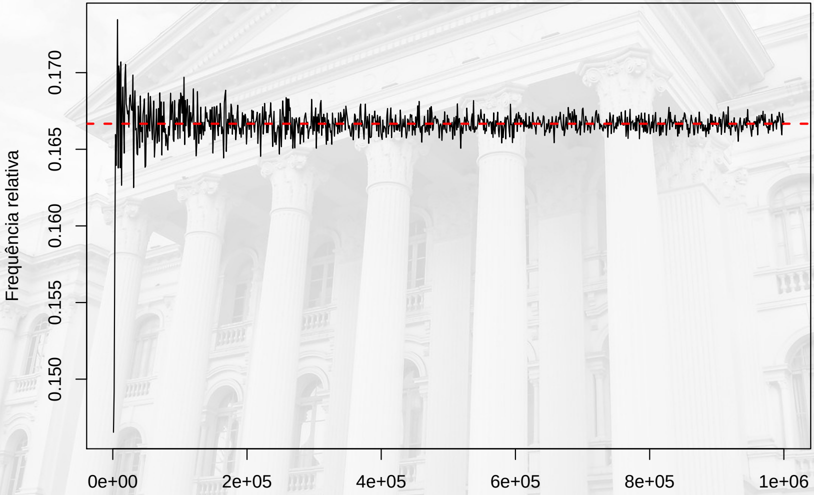
$$f_{A,n} = \frac{n(A)}{n}.$$

Para $n \rightarrow \infty$ repetições sucessivas e independentes, a frequência relativa de A tende para uma constante $\mathrm{P}(A)$, ou seja,

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{n(A)}{n} = \mathrm{P}(A).$$

Se um dado fosse lançado n vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

Definição frequentista



Exemplo: Lançamento de dado

- Considere o fenômeno aleatório lançamento de um dado “honesto”.
- Espaço amostral $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
  - Qual a probabilidade de ocorrer o evento A “sair número par”?
$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}.$$
  - Qual a probabilidade do evento B “face maior que 4”?
$$\mathrm{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6}.$$
  - Qual a probabilidade do evento C “maior que 2 e menor que 5”?
$$\mathrm{P}(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6}.$$
  - Qual a probabilidade do evento D “maior ou igual a 2 e menor ou igual a 5”?
$$\mathrm{P}(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6}.$$

Exemplo: Treinamento esportivo

Uma escola particular pretende oferecer um treinamento de esportistas aos seus alunos. Dos 300 alunos entrevistados, 142 optaram pelo voleibol (V), 123 indicaram o basquete (B) e 35 indicaram o futebol (F). Selecionado aleatoriamente um desses alunos, qual a probabilidade de:

- Obter alguém que prefere o voleibol?

$$\mathrm{P}(V) = \frac{n(V)}{n(\Omega)} = \frac{142}{300}.$$

- Obter alguém que prefere o futebol?

$$\mathrm{P}(F) = \frac{n(F)}{n(\Omega)} = \frac{35}{300}.$$

- Obter alguém que prefere o volei ou futebol?

$$\mathrm{P}(V \cup F) = \frac{n(V \cup F)}{n(\Omega)} = \frac{142 + 35}{300}.$$

Note que os eventos F e V são mutuamente exclusivos, ou seja, $\mathrm{P}(V \cap F) = \emptyset$.

Exemplo: Alunos

Considere uma população de alunos dos gêneros masculino (M) e feminino (F) dividos em duas turmas A e B, conforme tabela abaixo:

	F	M	Total
A	21	5	26
B	16	8	24
Total	37	13	50

Podemos extrair as seguintes probabilidades

$$P(F) = \frac{37}{50} = 0{,}74; \quad P(M) = \frac{13}{50} = 0{,}26$$
$$P(A) = \frac{26}{50} = 0{,}52; \quad P(B) = \frac{24}{50} = 0{,}48.$$

Qual seria a probabilidade de escolhermos ao acaso um estudante do sexo feminino (F) ou alguém da Turma B?

Exemplo: Alunos (cont.)

Então, queremos calcular $P(F \cup B)$ e poderíamos pensar em fazer:

$$\begin{aligned} P(F \cup B) &= P(F) + P(B) \\ &= 0{,}74 + 0{,}48 \\ &= 1{,}22, \end{aligned}$$

o que não é possível, pois a soma é superior a 1.

Não é difícil ver que estamos somando alguns indivíduos 2 vezes.
Estudantes do sexo feminino e da turma B (evento $F \cap B$) estão incluídos em ambos, no evento F e no evento B.

Exemplo: Alunos (cont.)

Logo, precisamos subtrair $\mathrm{P}(F \cap B)$ para obter a probabilidade correta.

Neste caso, pela tabela, vemos que a interseção $F \cap B$ resulta na probabilidade

$$\mathrm{P}(F \cap B) = \frac{16}{50} = 0{,}32.$$

O resultado correto para $\mathrm{P}(F \cup B)$ é

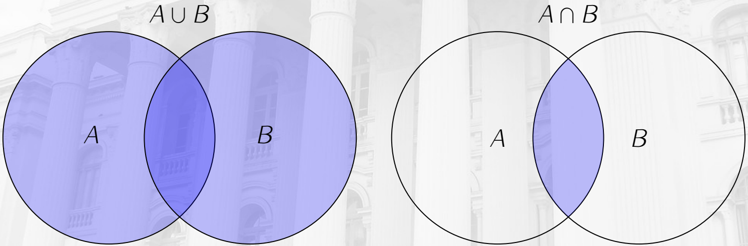
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(F \cup B) &= \mathrm{P}(F) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(F \cap B)\\ &= 0{,}74 + 0{,}48 - 0{,}32\\ &= 0{,}90.\end{aligned}$$

Regra da adição

Regra da adição de probabilidades

A probabilidade da união entre dois eventos quaisquer, A e B, é dada pela **regra da adição de probabilidades**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

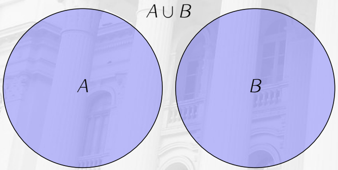


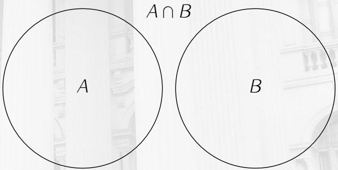
Regra da adição de probabilidades

Note que a regra da adição pode ser simplificada, **se e somente se** os eventos A e B forem **disjuntos** (ou mutuamente exclusivos)

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B),$$

pois, neste caso, $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0.$





Regra do complementar

Como consequência da regra da adição, temos que, para qualquer evento A,

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Verifique por meio de $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c)$.

$$\begin{aligned}
P(A \cup A^c) &= 1. \quad \text{Pela regra da adição, tem-se} \\
P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c) &= 1. \quad \text{Interseção é nula, então} \\
P(A) + P(A^c) &= 1. \quad \text{Portanto,} \\
P(A) &= 1 - P(A^c).
\end{aligned}$$

Exemplo: Alunos (cont.)

Qual seria a probabilidade de escolhermos ao acaso um estudante que não seja do sexo feminino (F) nem alguém da Turma B?

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}((F \cup B)^c) &= 1 - (\mathrm{P}(F) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(F \cap B)) \\
&= 1 - 0{,}90 \\
&= 0{,}10.
\end{aligned}
$$

Note que este evento é equivalente a ser do sexo masculino e da turma A.

Considerações finais

Considerações finais

Revisão

- Definições de probabilidade.
  - Definição axiomática.
  - Definição clássica.
  - Definição frequentista.
  - Definição subjetiva.
- Regra da adição de probabilidades.
- Regra do complementar.

Figura 2. Foto do Pixabay no Pexels.