Probabilidade condicional e Teorema de Bayes

Prof. Wagner Hugo Bonat

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Probabilidade condicional

Probabilidade condicional

- Fenômenos podem ocorrer em etapas.
- O que ocorre em uma etapa pode afetar o resultado das demais.
- Podemos **ganhar informação**, e podemos **recalcular** as probabilidades de interesse.
- Probabilidades **recalculadas** recebem o nome de **probabilidades condicionais**.

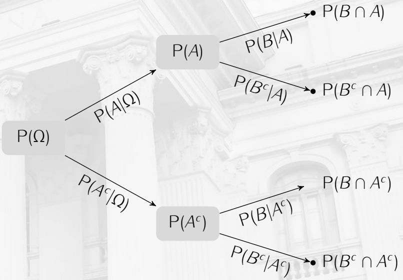


Figura 1. Ilustração da árvore de probabilidade.

Exemplo: Lançamento do dado

Considere o seguinte exemplo:

- Um dado foi lançado, qual é a probabilidade de ter ocorrido face 4?
  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $n(\Omega) = 6$.

  $$A = \text{face } 4 = \{4\}, n(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}.$$

- Suponha que o dado foi jogado e, sem saber o resultado, você recebe a informação de que ocorreu face par. Qual é a probabilidade de ter saido face 4 com essa "nova" informação?

  $$B = \text{face par} = \{2,4,6\}, n(B) = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}.$$

  $$C = \text{face 4, dado que ocorreu face par} = \{4\}, \mathrm{P}(C) = \frac{n(C)}{n(B)} = \frac{1}{3}.$$

Definição: Probabilidade condicional

- Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A ocorrer, dado que ocorreu B, é representado por $P(A|B)$ e dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{para} \quad P(B) > 0.$$

- Caso $P(B) = 0$, definimos $P(A|B) = P(A)$.

Exemplo: Lançamento do dado (cont.)

Usando a definição formal:

- $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$
- $\mathrm{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A|B) &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \\ &= \frac{1/6}{3/6} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Regra do produto

A regra do produto é uma expressão derivada do conceito de probabilidade condicional. Uma vez que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

temos que

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Essa expressão permite calcular probabilidades em espaços amostrais que são realizados em sequência, onde a ocorrência da **segunda** etapa **depende** (ou não) da ocorrência da **primeira** etapa.

Exemplo: Baralho

- Qual a probabilidade de se obter dois *ases* em seguida, quando se extraem duas cartas de um baralho comum de 52 cartas, se:
- A primeira carta é reposta no baralho antes da extração da segunda carta.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52}.$$

- A primeira carta extraída **não** é reposta antes da extração da segunda carta.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{3}{51}\frac{4}{52}.$$

Independência

Eventos independentes

- Vimos que, em algumas situações, saber que B ocorreu nos dá uma informação “extra” sobre a ocorrência de A.
- Porém, existem algumas situações nas quais saber que o evento B ocorreu não tem qualquer interferência na ocorrência ou não de A.
- Nestes casos, podemos dizer que os eventos A e B são **independentes**.

Definição: Eventos independentes

Os eventos A e B são **eventos independentes** se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja, eventos A e B são independentes se

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \quad \text{e também que} \quad \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B).$$

Com isso, e a regra do produto, temos que

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A).$$
$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

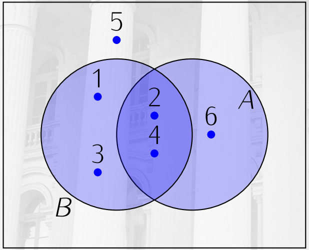
Exemplo: Lançamento do dado

- Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos

  $A =$ "resultado é um número par"

  $B =$ "resultado é um número menor ou igual a 4"

Os eventos A e B são independentes?



Exemplo: Lançamento do dado (cont.)

Pela definição intuitiva:

$P(A) = 1/2, \quad P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{2/6}{4/6} = 1/2$

$P(B) = 2/3, \quad P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) = \frac{2/6}{3/6} = 2/3.$

Portanto: $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$

Pela definição formal:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1/3$

$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = 1/3$, assim $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Portanto, os eventos A e B são independentes. Saber que A ocorreu não muda a probabilidade de B ocorrer e vice-versa.

Exemplo: Peças defeituosas

Uma empresa produz peças em duas máquinas I e II, que podem apresentar desajustes com probabilidade 0,05 e 0,10, respectivamente.

No início do dia de operação, um teste é realizado e, caso a máquina esteja fora de ajuste, ela ficará sem operar nesse dia passando por revisão técnica.

Para cumprir o nível mínimo de produção, pelo menos uma das máquinas deve operar. Você diria que a empresa corre o risco de não cumprir com suas metas de produção?

Exemplo: Peças defeituosas (cont.)

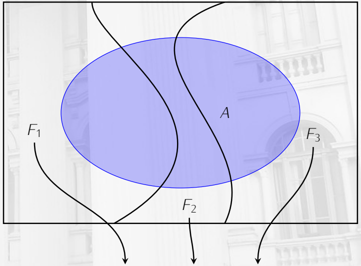
- Primeiro passo é definir os eventos
  - D_1: Máquina 1 defeituosa; D_1^c: Máquina 1 não defeituosa.
  - D_2: Máquina 2 defeituosa; D_2^c: Máquina 2 não defeituosa.
- Possibilidades:

- $P(D_1 \cap D_2) = 0{,}05 \cdot 0{,}10 = 0{,}005.$
- $P(D_1 \cap D_2^c) = 0{,}05 \cdot 0{,}90 = 0{,}045.$
- $P(D_1^c \cap D_2) = 0{,}95 \cdot 0{,}10 = 0{,}095.$
- $P(D_1^c \cap D_2^c) = 0{,}95 \cdot 0{,}90 = 0{,}855.$

Exemplo: Fábrica de sorvetes

Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de uma outra fazenda F_2 e 50% de F_3.
Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.
Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, qual a probabilidade do leite estar adulterado?

- Probabilidades informadas:
  - $P(F_1) = 0{,}20$;
  - $P(F_2) = 0{,}30$;
  - $P(F_3) = 0{,}50$;
  - $P(A|F_1) = 0{,}20$;
  - $P(A|F_2) = 0{,}05$;
  - $P(A|F_3) = 0{,}02$;



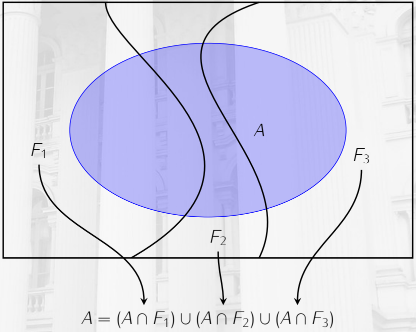
$A = (A \cap F_1) \cup (A \cap F_2) \cup (A \cap F_3)$

Exemplo: Fábrica de sorvetes (cont.)

- Probabilidades informadas:
  - $P(F_1) = 0{,}20$;
  - $P(F_2) = 0{,}30$;
  - $P(F_3) = 0{,}50$;
  - $P(A|F_1) = 0{,}20$;
  - $P(A|F_2) = 0{,}05$;
  - $P(A|F_3) = 0{,}02$;

- O que queremos calcular?

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap F_1) \cup (A \cap F_2) \cup (A \cap F_3)) \\ &= P(A|F_1)P(F_1) \cup P(A|F_2)P(F_2) \cup P(A|F_3)P(F_3) \\ &= 0{,}20 \cdot 0{,}20 + 0{,}05 \cdot 0{,}30 + 0{,}02 \cdot 0{,}50 = 0{,}065. \end{aligned}$$



Teorema de Bayes

Partição do espaço amostral

Dizemos que os eventos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ formam uma **partição** do espaço amostral, se eles não tem interseção entre si, e se sua união é igual ao espaço amostral. Isto é,

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{para} \quad i \neq j \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^{k} C_i = \Omega.$$

Figura 2. Partição do espaço amostral.

Teorema de Bayes

Suponha que os eventos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ formem uma partição de Ω e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento A, se conheçam as probabilidades $P(A|C_i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Então, para qualquer j,

$$\mathrm{P}(C_j|A) = \frac{\mathrm{P}(C_j) \cdot \mathrm{P}(A|C_j)}{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(C_i) \cdot \mathrm{P}(A|C_i)}, \quad j = 1,2, \ldots ,k.$$

- Demonstração: trivial usando a definição de probabilidade condicional.

$$\mathrm{P}(C_j|A) = \frac{\mathrm{P}(C_j \cap A)}{\mathrm{P}(A)} \quad \rightarrow \text{(Definição de probabilidade condicional)}$$

$$\mathrm{P}(C_j|A) = \frac{\mathrm{P}(A|C_j) \cdot \mathrm{P}(C_j)}{\mathrm{P}(A)} \quad \rightarrow \text{(Regra do produto)}$$

$$\mathrm{P}(C_j|A) = \frac{\mathrm{P}(C_j) \cdot \mathrm{P}(A|C_j)}{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(C_i) \cdot \mathrm{P}(A|C_i)} \quad \rightarrow \text{(Partição do espaço amostral)}$$

Exemplo: Fábrica de sorvetes (cont.)

- Suponha agora que estamos interessados também na probabilidade de uma amostra adulterada ter sido obtida a partir da fazenda F_1, ou seja, $\mathrm{P}(F_1|A)$.
- Note a ideia de inversão das informações.
- Como proceder para este cálculo? USE A DEFINIÇÃO!

$$\mathrm{P}(F_1|A) = \frac{\mathrm{P}(F_1 \cap A)}{\mathrm{P}(A)} \rightarrow \text{(Definição de probabilidade condicional)}$$

$$\mathrm{P}(F_1|A) = \frac{\mathrm{P}(A|F_1) \cdot \mathrm{P}(F_1)}{\mathrm{P}(A)} \rightarrow \text{(Regra do produto)}$$

$$\mathrm{P}(F_1|A) = \frac{\mathrm{P}(A|F_1) \cdot \mathrm{P}(F_1)}{\mathrm{P}(A|F_1) \cdot \mathrm{P}(F_1) + \mathrm{P}(A|F_2) \cdot \mathrm{P}(F_2) + \mathrm{P}(A|F_3) \cdot \mathrm{P}(F_3)} \rightarrow \text{(Exemplo anterior)}$$

$$\mathrm{P}(F_1|A) = \frac{0{,}20 \cdot 0{,}20}{0{,}065} \approx 0{,}615.$$

Considerações finais

Considerações finais

Revisão

- Probabilidade condicional.
  - Regra do produto.
  - Eventos independentes.
- Partição do espaço amostral.
- Teorema de Bayes.

Figura 3. Foto do Pixabay no Pexels.