Funções de probabilidade, densidade e distribuição

Prof. Wagner Hugo Bonat

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Função de probabilidade

Função discreta de probabilidade

- A **função de probabilidade** (fp) da v.a. discreta Y, que assume os valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$, é a função que atribui probabilidades a cada um dos possíveis valores: $\{y_i, \mathrm{p}(y_i)\}$, $i = 1, 2, \ldots$, ou seja,

$$\mathrm{P}(Y = y_i) = \mathrm{p}(y_i) = \mathrm{p}_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

com as seguintes propriedades:

- A probabilidade de cada valor deve estar entre 0 e 1,

$$0 \leq \mathrm{p}(y_i) \leq 1, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots.$$

- A soma de todas as probabilidades é igual a 1

$$\sum_i \mathrm{p}(y_i) = 1.$$

Exemplo: Lançamento de uma moeda

Seja o experimento aleatório de lançar duas moedas honestas. Defina $Y =$ número de resultados cara (C). Encontre a função de probabilidade de Y.

- Relembre que $\Omega = \{CC, KK, CK, KC\}$.

Y	Frequência	$P(Y = y_i)$
0	1	1/4
1	2	2/4
2	1	1/4
Total	4	1

- Repare que as propriedades da função de probabilidade estão satisfeitas:
  - As probabilidades $P(Y = y_i)$ estão entre 0 e 1.
  - A soma das probabilidades é igual a 1.

Exemplo: Assistência social

Com dados do último censo, a assistente social de um Centro de Saúde constatou que para as famílias da região, 20% não tem filhos, 30% tem um filho, 35% tem dois, e as restantes se dividem igualmente entre três, quatro ou cinco filhos. Descreva a função de probabilidade da v.a. Y definida como número de filhos.

Y	$P(Y = y_i)$
0	0.20
1	0.30
2	0.35
3	p
4	p
5	p

Exemplo: Assistência social (cont.)

Usando as propriedades da função de probabilidade temos

$$
\begin{aligned}
P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) + P(Y = 5) &= 1 \\
0.20 + 0.30 + 0.35 + p + p + p &= 1 \\
0.85 + 3p &= 1 \\
p &= 0.05.
\end{aligned}
$$

Exemplo: Construção civil

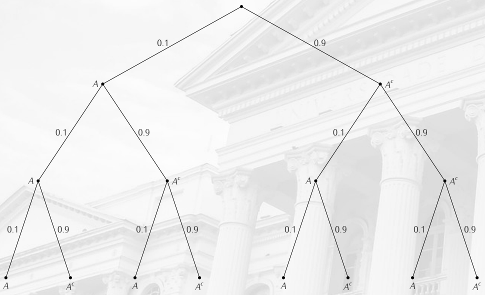
Na construção de um certo prédio, as fundações devem atingir 15 metros de profundidade e, para cada 5 metros de estacas colocadas, o operador anota se houve alteração no ritmo de perfuração previamente estabelecido. Essa alteração é resultado de mudanças, para mais ou para menos, na resistência do subsolo.

Nos dois casos, medidas corretivas serão necessárias, encarecendo o custo da obra. Com base em avaliações geológicas, admite-se que a probabilidade de ocorrência de alterações é de 0.1 para cada 5 metros.

O custo básico inicial é de 100 UPC (unidade padrão de construção) e será acrescida de $50k$, com k representando o número de alterações observadas. Como se comporta a v.a. custo das obras de fundações?

Exemplo: Construção civil (cont.)

- Defina o evento A = alteração.



- Eventos e suas probabilidades (análogo à tabela de frequência).

Eventos	Probabilidade	k	$C = 100 + 50k$
AAA	0.10^3	3	250
AAA^c	$0.10^2 \cdot 0.9$	2	200
AA^cA	$0.10^2 \cdot 0.9$	2	200
AA^cA^c	$0.10 \cdot 0.9^2$	1	150
A^cAA	$0.10^2 \cdot 0.9$	2	200
A^cAA^c	$0.10 \cdot 0.9^2$	1	150
A^cA^cA	$0.10 \cdot 0.9^2$	1	150
$A^cA^cA^c$	0.9^3	0	100

Exemplo: Construção civil (cont.)

- Eventos e suas probabilidades.

Eventos	Probabilidade	k	C
AAA	0.10^3	3	250
AAA^c	$0.10^2 \cdot 0.9$	2	200
AA^cA	$0.10^2 \cdot 0.9$	2	200
AA^cA^c	$0.10 \cdot 0.9^2$	1	150
A^cAA	$0.10^2 \cdot 0.9$	2	200
A^cAA^c	$0.10 \cdot 0.9^2$	1	150
A^cA^cA	$0.10 \cdot 0.9^2$	1	150
$A^cA^cA^c$	0.9^3	0	100

- Função de probabilidade de C.

C	100	150	200	250
$P(C = c_i)$	0.729	0.243	0.027	0.001

Função de distribuição de probabilidade

Função de distribuição de probabilidade

- Em muitas situações, é útil calcularmos a probabilidade **acumulada** até um certo valor.
- Definimos a **função de distribuição** ou **função acumulada de probabilidade** de uma v.a. Y pela expressão:
$$F(y) = \mathrm{P}(Y \leq y),$$
para qualquer número real y.
- Análogo à distribuição de frequência acumulada.

Exemplo: Vacina

Uma população de 1000 crianças foi analisada num estudo para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. No estudo, as crianças recebiam uma dose da vacina e, após um mês, passavam por um novo teste. Caso ainda tivessem alguma reação alérgica, recebiam outra dose da vacina. Ao fim de 5 doses todas as crianças foram consideradas imunizadas.

Os resultados estão na tabela a seguir.

	1	2	3	4	5
Freq.	245	288	256	145	66

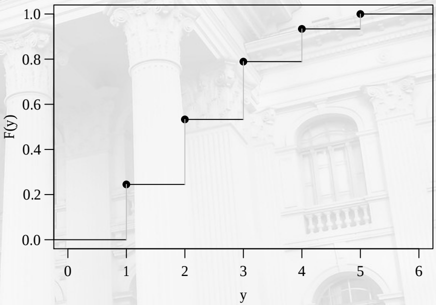
Para uma criança sorteada ao acaso, qual a probabilidade dela ter recebido 2 doses? E até 2 doses?

Exemplo: Vacina (cont.)

- Tabela de frequência.

	n_i	f_i	f_{ac}
1	245	0.245	0.245
2	288	0.288	0.533
3	256	0.256	0.789
4	145	0.145	0.934
5	66	0.066	1.000
Total	1000	1.000	

- Grafico de $F(y)$.



Exemplo: Vacina (cont.)

- Usando a definição frequentista, temos

$$F(2) = \mathrm{P}(Y \leq 2) = \mathrm{P}(Y = 1) + \mathrm{P}(Y = 2) = 0.533.$$

- Note que podemos escrever

$$F(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = 0.533 \quad \text{para} \quad 2 \leq y < 3.$$

- A função de distribuição é dada por:

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 1 \\ 0.245 & \text{se } 1 \leq y < 2 \\ 0.533 & \text{se } 2 \leq y < 3 \\ 0.789 & \text{se } 3 \leq y < 4 \\ 0.934 & \text{se } 4 \leq y < 5 \\ 1 & \text{se } y \geq 5. \end{cases}$$

Função densidade de probabilidade

Variáveis aleatórias contínuas

- Não podemos atribuir probabilidades a valores específicos, pois a área abaixo de um ponto é zero.
- Atribuímos probabilidades a intervalos de valores, por meio de uma **função**. Portanto, as probabilidades são representadas por áreas.

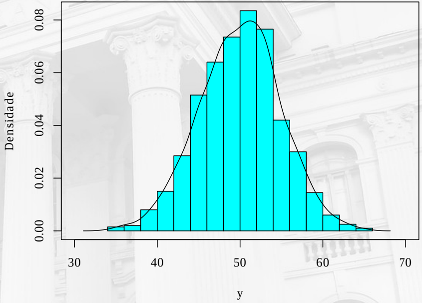


Figura 1. Histrograma com suavização.

Função densidade de probabilidade

- A **função densidade de probabilidade** (fdp) atribui probabilidades a intervalos de valores do tipo (a,b), e é definida por

$$P(a < Y < b) = \int_a^b f(y)dy$$

com as seguintes propriedades:

- É uma função não negativa

$$f(y) \geq 0.$$

- A área total sob a curva deve ser igual a 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = 1.$$

Função densidade de probabilidade

- Qualquer função $f(\cdot)$ que seja não negativa e cuja área total sob a curva seja igual a uma unidade caracterizará uma v.a. contínua.
- $f(y)$ **não** representa a probabilidade de ocorrência de algum evento. A área sob a curva entre dois pontos é que fornecerá a probabilidade.
- Note que
  - $\mathrm{P}(a \leq Y \leq b) = \mathrm{P}(a < Y \leq b) = \mathrm{P}(a \leq Y < b) = \mathrm{P}(a < Y < b)$.
  - $\mathrm{P}(Y = y) = 0$.

Função de distribuição acumulada

- Definição: A **função de distribuição acumulada** $F(y)$ de uma v.a. contínua Y com densidade $f(y)$ é

$$F(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt, \quad \text{para} \quad -\infty < y < \infty.$$

- De imediato, tem-se

$$\mathrm{P}(a < Y < b) = F(b) - F(a) \quad \text{e} \quad f(y) = \frac{dF(y)}{dy},$$

desde que a derivada exista.

Exemplo: V.a. contínua

Seja a função

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2, & \text{se } -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Mostre que é uma fdp.
- Calcule:
  1. $P(Y > 0)$.
  2. $P(Y > 0.5)$.
  3. $P(-0.5 \leq Y \leq 0.5)$.
  4. $P(Y \leq 1)$.
  5. $P(Y < 0.5)$.
  6. $P(Y < 0 \cup Y > 0.5)$.

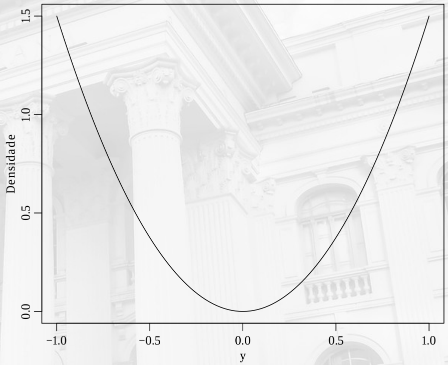


Figura 2. Gráfico da fdp.

Exemplo: V.a. contínua (cont.)

- Para mostrar que é fdp temos que verificar:
  - $f(y) \geq 0$. Trivial
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} y^2 dy = \frac{3}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\left[\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}\right] = 1.$$

- Para calcular as probabilidades, vamos primeiro obter a distribuição acumulada.

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt = \int_{-1}^{y} \frac{3}{2} t^2 dt = \frac{3}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{y} = \frac{3}{2}\left[\frac{y^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right] = \frac{3y^3}{6} + \frac{3}{6} = 0.5y^3 + 0.5.$$

Exemplo: V.a. contínua (cont.)

Relembre $F(y) = 0.5y^3 + 0.5$.

1. $\text{P}(Y > 0) = 1 - \text{P}(Y \leq 0) = 1 - F(0) = 0.5$.
2. $\text{P}(Y > 0.5) = 1 - \text{P}(Y \leq 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - 0.5625 = 0.4375$.
3. $\text{P}(-0.5 \leq Y \leq 0.5) = F(0.5) - F(-0.5) = 0.5625 - 0.4375 = 0.125$.
4. $\text{P}(Y < 1) = \text{P}(Y \leq 1) = 1$.
5. $\text{P}(Y < 0.5) = F(0.5) = 0.5625$.
6. $\text{P}(Y < 0 \cup Y > 0.5) = F(0) + (1 - F(0.5)) = 0.5 + 0.4375 = 0.9375$.

Exemplo: V.a. contínua (cont.)

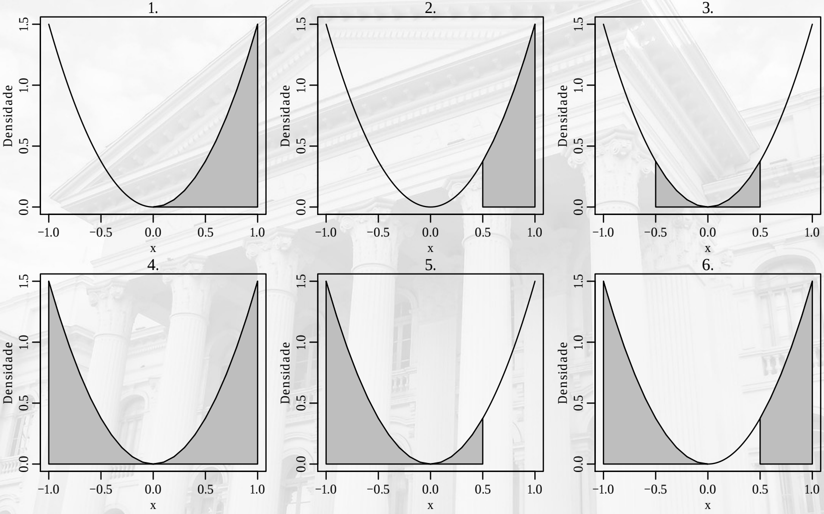


Figura 3. Gráficos da fdp com áreas indicando as probabilidades.

Considerações finais

Considerações finais

- Função discreta de probabilidade.
- Função de distribuição.
- Função densidade de probabilidade.
- Exemplos.

Figura 4. Foto de Isabella Mendes no Pexels.