Esperança, variância e covariância

Prof. Wagner Hugo Bonat

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Esperança matemática

Esperança matemática

- Seja Y uma v.a. com distribuição de probabilidade $f(y)$.
- A **média** ou **valor esperado** de Y é dado por:
  - Caso discreto: $\mu = \mathrm{E}(Y) = \sum_y y f(y)$;
  - Caso contínuo: $\mu = \mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy$.

Figura 1. Foto de Clement Eastwood no Pexels.

Exemplo: Vendas

Um vendedor tem duas reuniões de vendas em um dado dia. Na primeira reunião, ele acredita ter 70% de chance de fazer uma venda que lhe renderá $R\$1000$. Na segunda, ele acredita ter 40% de chance de fazer uma venda que se realizada lhe renderá $R\$1500$. Assuma que as vendas são independentes. Quanto de comissão ele espera ganhar em dias como este?

- Defina Y como sendo a v.a. comissão. $\Omega = \{0, 1000, 1500, 2500\}$.
- A distribuição de probabilidade de Y é

Y	$P(Y = y)$
0	$(1 - 0.7) \cdot (1 - 0.4) = 0.18$
1000	$0.7 \cdot (1 - 0.4) = 0.42$
1500	$(1 - 0.7) \cdot 0.4 = 0.12$
2500	$0.7 \cdot 0.4 = 0.28$

- Usando a definição o valor esperado é $E(Y) = 0.18 \cdot 0 + 0.42 \cdot 1000 + 0.12 \cdot 1500 + 0.28 \cdot 2500 = 1300$.

Exemplo: Tempo de vida

Seja Y uma v.a. que mede o tempo de vida de um dispositivo eletrônico em horas. Considere a seguinte fdp para Y

$$f(y) = \begin{cases} 20000/y^3 & y > 100, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Qual o tempo de vida esperado deste dispositivo?

$$\mu = \mathrm{E}(Y) = \int_{100}^{\infty} y \frac{20000}{y^3} dy = 200.$$

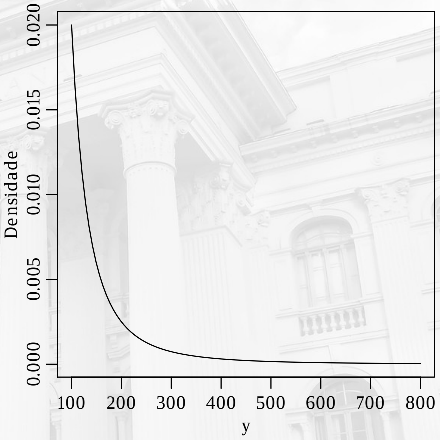

Figura 2. Gráfico da fdp.

Esperança matemática

- Sejam X e Y v.a.'s com função de distribuição conjunta $f(x,y)$.
- O valor esperado da variável $g(X,Y)$ é
  - Caso discreto: $\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(X,Y)f(x,y)$.
  - Caso contínuo: $\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(X,Y)f(x,y)dxdy$.

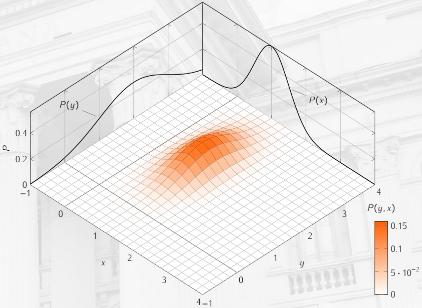

Figura 3. Exemplo de distribuição conjunta contínua.

Exemplo: Esperança do produto

Sejam as v.a. discretas X e Y com fp dada por

X/Y	0	1	2
0	3/28	9/28	3/28
1	3/14	3/14	0
2	1/28	0	0

Encontre a $\mathrm{E}(XY)$.

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_{x}\sum_{y} xyf(x,y) = \frac{3}{14}$$

Exemplo: Esperança do produto (cont.)

Fazendo as contas

X	Y	XY	$P(X,Y)$	$XY \cdot P(X,Y)$
0	0	0	3/28	0
1	0	0	9/28	0
2	0	0	3/28	0
0	1	0	3/14	0
1	1	1	3/14	3/14
2	1	2	0	0
0	2	0	1/28	0
1	2	2	0	0
2	2	4	0	0

Variância

Variância de v.a.

- Esperança descreve o centro de massa da distribuição de probabilidade.
- Esperança não informa como a v.a se distribui em torno da esperança.
- Precisamos de uma medida de dispersão.

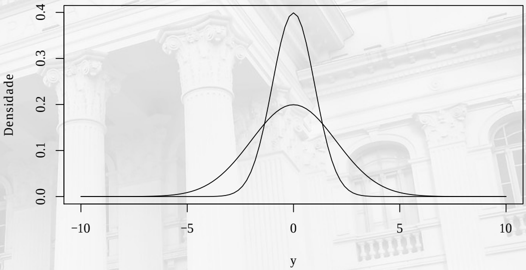

Figura 4. Distribuições com mesma média e variâncias diferentes.

Variância

- Definição: Seja Y uma v.a. com fp ou fdp $f(y)$ e esperança μ. A variância de Y é dada por
  - Caso discreto:
$$\sigma^2 = \mathrm{E}[(Y-\mu)^2] = \sum_y (y-\mu)^2 f(y).$$
  - Caso contínuo:
$$\sigma^2 = \mathrm{E}[(Y-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu)^2 f(y) dy.$$
- A raiz quadrada positiva da variância é chamada de **desvio padrão** de Y.
- Forma alternativa:
$$\sigma^2 = \mathrm{E}(Y^2) - \mu^2.$$

Exemplo: Demanda de água

A demanda semanal de água potável, em milhares de litros, de uma cadeia de lojas é uma v.a. contínua com fdp dada por

$$f(y) = \begin{cases} 2(y-1), & 1 < y < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Encontre $\mathrm{E}(Y)$ e $\mathrm{V}(Y)$.

$$\mathrm{E}(Y) = \int_1^2 y f(y) dy = 2\int_1^2 y(y-1)dy = \frac{5}{3}.$$

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_1^2 y^2 f(y) dy = 2\int_1^2 y^2(y-1)dy = \frac{17}{6}.$$

$$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}^2(Y) = \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Covariância e correlação

Covariância

- Definição: Sejam X e Y v.a.'s com função de probabilidade conjunta $f(x,y)$. A **covariância** entre X e Y é dada por
  - Caso discreto:

$$\sigma_{XY} = \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y).$$

  - Caso contínuo:

$$\sigma_{XY} = \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)dxdy.$$

- Covariância é uma medida da associação entre as v.a.'s X e Y.
- Forma alternativa

$$\sigma_{XY} = \mathrm{E}(XY) - \mu_X\mu_Y.$$

Correlação

- Definição: Sejam X e Y v.a.'s com covariância σ_{XY} e desvio padrão σ_X e σ_Y. A **correlação** entre X e Y é dada por

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad -1 \leq \rho_{XY} \leq 1.$$

- A correlação é uma medida livre das unidades de medida de X e Y.
- **Cuidado**!! Correlação 0 não significa necessariamente independência estatística.

Exemplo: Distribuição conjunta

Considere a seguinte distribuição conjunta.

Y/X	0	1	2	$P(Y = y)$
0	3/28	9/28	3/28	15/28
1	3/14	3/14	0	3/7
2	1/28	0	0	1/28
$P(X = x)$	5/14	15/28	3/28	1

Obtenha σ_{XY} e ρ_{XY}.

Exemplo: Distribuição conjunta (cont.)

- Esperanças marginais

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x=0}^{2} xf(x) = (0)\left(\frac{5}{14}\right) + (1)\left(\frac{15}{28}\right) + (2)\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{3}{4}.$$

$$E(Y) = \mu_Y = \sum_{y=0}^{2} yf(y) = (0)\left(\frac{15}{28}\right) + (1)\left(\frac{3}{7}\right) + (2)\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 5 (cont.)

- Esperanças do quadrado

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{2} x^2 f(x) = (0^2)\left(\frac{5}{14}\right) + (1^2)\left(\frac{15}{28}\right) + (2^2)\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{27}{28}.$$

$$E(Y^2) = \sum_{y=0}^{2} y^2 f(y) = (0^2)\left(\frac{15}{28}\right) + (1^2)\left(\frac{3}{7}\right) + (2^2)\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{4}{7}.$$

- Esperança do produto (calculamos antes slide 8)

$$E(XY) = \frac{3}{14}.$$

Exemplo: Distribuição conjunta (cont.)

- Variâncias marginais

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{27}{28} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{112}.$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{4}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{28}.$$

Exemplo: Distribuição conjunta (cont.)

- Covariância

$$\sigma_{XY} = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \frac{3}{14} - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{56}.$$

- Correlação

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma^2_X}\sqrt{\sigma^2_Y}} = \frac{-9/56}{\sqrt{(45/112)(9/28)}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Propriedades

Propriedades da esperança e variância de combinação de v.a.'s

- Sendo a e b constantes, X e Y v.a. e $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ funções lineares, então são válidas:
  1. $\mathrm{E}[aX + b] = a\mathrm{E}[X] + b$.
  2. $\mathrm{E}[g(X) \pm h(X)] = \mathrm{E}[g(X)] \pm \mathrm{E}[h(X)]$.
  3. $\mathrm{E}[g(X,Y) \pm h(X,Y)] = \mathrm{E}[g(X,Y)] \pm \mathrm{E}[h(X,Y)]$.
  4. $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$ se e somente se X e Y são independentes.
  5. $\mathrm{V}[aX + bY + c] = a^2\mathrm{V}[X] + b^2\mathrm{V}[Y] + 2ab\mathrm{COV}(X,Y)$.
  6. $\mathrm{V}[aX - bY] = a^2\mathrm{V}[X] + b^2\mathrm{V}[Y] - 2ab\mathrm{COV}(X,Y)$.

Considerações finais

Considerações finais

- Esperança matemática.
- Variância.
- Covariância.
- Correlação.
- Propriedades.
- Exemplos.

Figura 5. Foto de Isabella Mendes no Pexels.