

Integral

Prof. Wagner Hugo Bonat

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná



DEST
Departamento
de Estatística



Integral de uma função (ideia geral)

Integral de uma função

- ▶ A integral definida I é denotada por

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

- ▶ A integral é um número, e existe em um intervalo fechado $[a, b]$.
- ▶ Considere uma função $f(x)$ definida e contínua no intervalo $[a, b]$.
- ▶ O domínio de $f(x)$ pode ser dividido em n subintervalos definidos por $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, onde $i = 1, \dots, n$.
- ▶ Soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

onde c_i é um número pertencente ao subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

- ▶ A integral definida é obtida como o limite da soma de Riemann quando a largura de todos os subintervalos de $[a, b]$ tende a zero:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

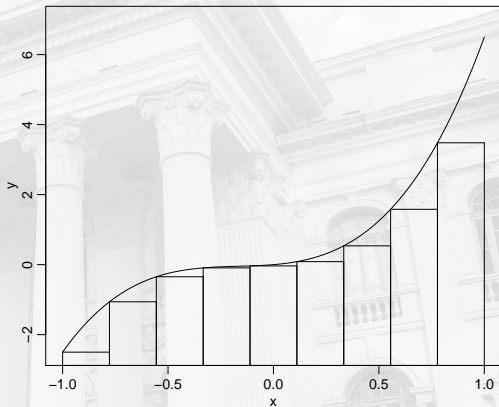


Figura 1. Ilustração da soma de Riemann.

Integral definida

- ▶ Aumentando o número de retângulos a área é melhor aproximada.
- ▶ Quando $n \rightarrow \infty$ ou $\Delta x_i \rightarrow 0$ a soma de Riemann corresponde à área abaixo da curva $f(x)$.

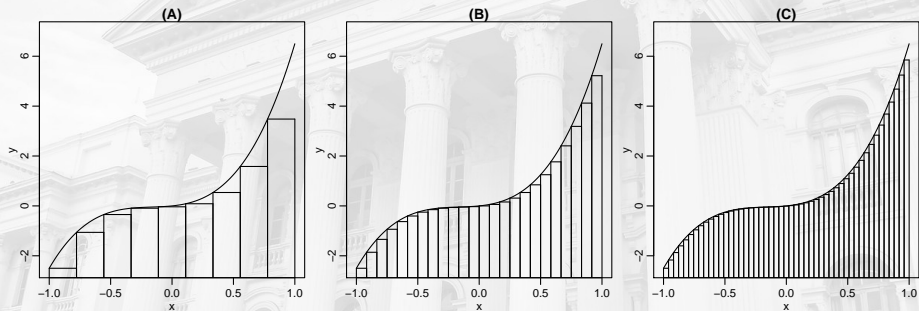


Figura 2. Ilustração da soma de Riemann.

Propriedades e Regras básicas de Integração

- ▶ Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em um certo intervalo e k uma constante. São válidas as propriedades:
 1. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$
 2. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$
- ▶ Regras básicas de integração:
 1. $\int kdx = kx + c.$
 2. $\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + c$ para $n \neq -1.$
 3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c.$
 4. $\int \exp x dx = \exp x + c.$
- ▶ Existem tabelas de integrais!
- ▶ Limitei ao que potencialmente você vai usar NESTE CURSO!

Exemplo

- ▶ Exemplo v.a. contínua, slide 20 e vídeo “Funções de probabilidade, densidade e distribuição”.

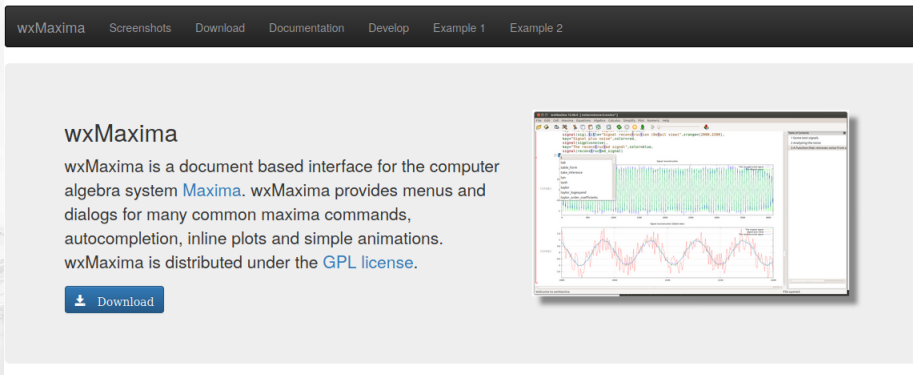
$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2, & \text{se } -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{3}{2}y^2 dy = \frac{3}{2} \left[\frac{y^{2+1}}{2+1} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{2} \left[\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right] = \frac{3}{2} \left[\frac{2}{3} \right] = 1.$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^y f(t) dt = \int_{-1}^y \frac{3}{2}t^2 dt = \frac{3}{2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^y = \frac{3}{2} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right] = \frac{3y^3}{6} + \frac{3}{6} = 0,5y^3 + 0,5.$$

Softwares de matemática simbólica

- ▶ wxMaxima (wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima)

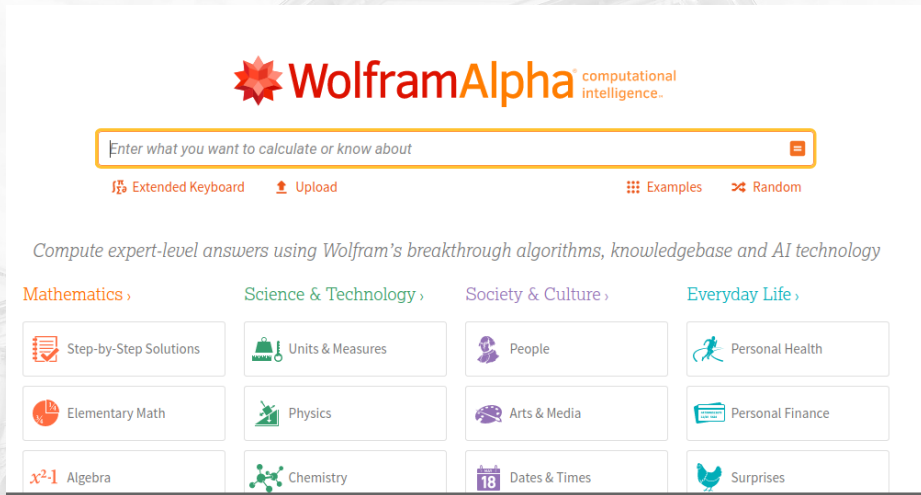


The screenshot shows the wxMaxima website homepage. At the top, there is a dark navigation bar with links: wxMaxima, Screenshots, Download, Documentation, Develop, Example 1, and Example 2. The main content area has a light gray background. On the left, the text reads: 'wxMaxima' in a large font, followed by a paragraph: 'wxMaxima is a document based interface for the computer algebra system [Maxima](#). wxMaxima provides menus and dialogs for many common maxima commands, autocompletion, inline plots and simple animations. wxMaxima is distributed under the [GPL license](#).' Below this text is a blue 'Download' button with a download icon. On the right side of the main content area, there is a screenshot of the wxMaxima software interface. The interface shows a code editor with Maxima code, a command window, and two plots: a green waveform plot and a red waveform plot.

Figura 3. Página inicial wxMaxima.

Softwares matemática simbólica

- ▶ Wolfram alpha (www.wolframalpha.com)



The image shows the homepage of Wolfram Alpha. At the top center is the Wolfram Alpha logo, which consists of a red starburst icon followed by the text "WolframAlpha" in a bold, sans-serif font, with "computational intelligence." in a smaller font below it. Below the logo is a large, orange-bordered search bar with the placeholder text "Enter what you want to calculate or know about". To the right of the search bar is a small orange icon of a document. Below the search bar are four navigation links: "Extended Keyboard" (with a keyboard icon), "Upload" (with a document icon), "Examples" (with a grid icon), and "Random" (with a crossed-out square icon). Below these links is a line of text: "Compute expert-level answers using Wolfram's breakthrough algorithms, knowledgebase and AI technology". Below this text are four main category buttons: "Mathematics", "Science & Technology", "Society & Culture", and "Everyday Life". Each category button has a small arrow pointing to the right. Below these category buttons is a grid of 12 sub-category buttons, arranged in three rows and four columns. Each sub-category button has an icon and text: "Step-by-Step Solutions" (with a checklist icon), "Units & Measures" (with a scale icon), "People" (with a person icon), "Personal Health" (with a person running icon), "Elementary Math" (with a pie chart icon), "Physics" (with a microscope icon), "Arts & Media" (with a film strip icon), "Personal Finance" (with a wallet icon), " x^2-1 Algebra" (with a math symbol icon), "Chemistry" (with a molecular structure icon), "Dates & Times" (with a calendar icon), and "Surprises" (with a bird icon).

Figura 4. Página inicial Wolfram alpha.

Distribuição conjunta

- ▶ Exemplo Produção, slide 20 e vídeo “Variáveis aleatórias bidimensionais”.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x + 3y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. Verifique se $f(x,y)$ é uma distribuição de probabilidade.
2. Encontre as distribuições marginais de X e Y .
3. Encontre a probabilidade $P[(X,Y) \in A]$, onde $A = \{(x,y) | 0 < x < 0.5, 0.25 < y < 0.5\}$.

Exemplo (cont.)

- ▶ Obtendo as marginais

$$f(x) = \int_0^1 \frac{4x}{5} + \frac{6y}{5} dy = \left[\frac{4xy}{5} + \frac{6y^2}{10} \right]_0^1 = \frac{4x + 3}{5},$$

para $0 \leq x \leq 1$, e 0 caso contrário.

$$f(y) = \int_0^1 \frac{4x}{5} + \frac{6y}{5} dx = \frac{2 + 6y}{5},$$

para $0 \leq y \leq 1$, e 0 caso contrário.

- ▶ Obtendo a probabilidade

$$P[(X, Y) \in A] = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x}{5} + \frac{6y}{5} dy dx = \frac{13}{160}.$$

- ▶ Integral é o cálculo de uma área.
- ▶ Tabelas de integrais.
- ▶ Diversos softwares disponíveis.



Figura 5. Foto de Isabella Mendes no Pexels.