Distribuições contínuas: Uniforme Contínua e Exponencial

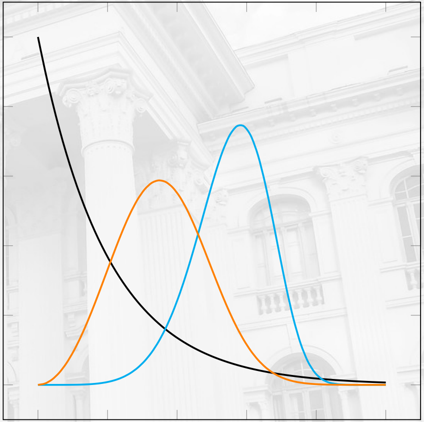
Prof. Walmes M. Zeviani

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Conteúdo

Neste vídeo

- Modelos probabilísticos contínuos.
  - Uniforme Contínua.
  - Exponencial.
- Fundamentação e propriedades.
- Exemplos de aplicação.



Distribuição Uniforme Contínua

Características de uma v.a. com distribuição Uniforme Contínua

Uma v.a. tem distribuição Uniforme Contínua se atender as condições abaixo.

1. O resultado é um número real em um **intervalo de limites conhecidos** a e b $(b > a)$.
2. Todos os valores dentro do intervalo $[a, b]$ têm **igual probabilidade** de ocorrência.

Exemplos

- A posição do pedestre na quadra quando chama um táxi.
- O tempo decorrido desde a última hora completa no momento em que ele chama o táxi.

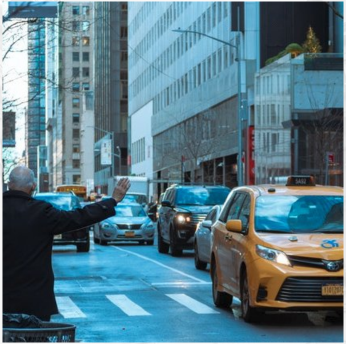


Figura 1. Pedestre acenando para o táxi. Foto de Alexandros Chatzidimos no Pexels.

Exemplos de uma v.a. com distribuição Uniforme Contínua

1. Custo do sinistro em relação ao valor da apólice.
2. A posição na qual a plataforma de uma colhedora de soja foi danificada durante a colheita.
3. A longitude de entrada de um meteorito na Terra.
4. A posição do ponteiro dos minutos quando acaba a pilha de um relógio.
5. A posição de ocorrência de um acidente ao longo de uma estrada.
6. A posição da ruptura do fio de uma linha de transmissão de eletricidade.

Figura 2. Extraído de www.mamaquinas.com.br.

Distribuição Uniforme Contínua

Uma v.a. Y tem distribuição Uniforme Contínua quando sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(y) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq y \leq b.$$

Denotamos por $Y \sim \text{UC}(a, b)$.

A função de distribuição da Uniforme Contínua apresenta forma analítica, obtida por integração,

$$F(y) = \text{P}(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{b-a} \, \text{d}u = \frac{y-a}{b-a}.$$

Por fim, a média e a variância de Y são

$$\mu = \text{E}(Y) = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \text{V}(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Gráfico da distribuição Uniforme Contínua

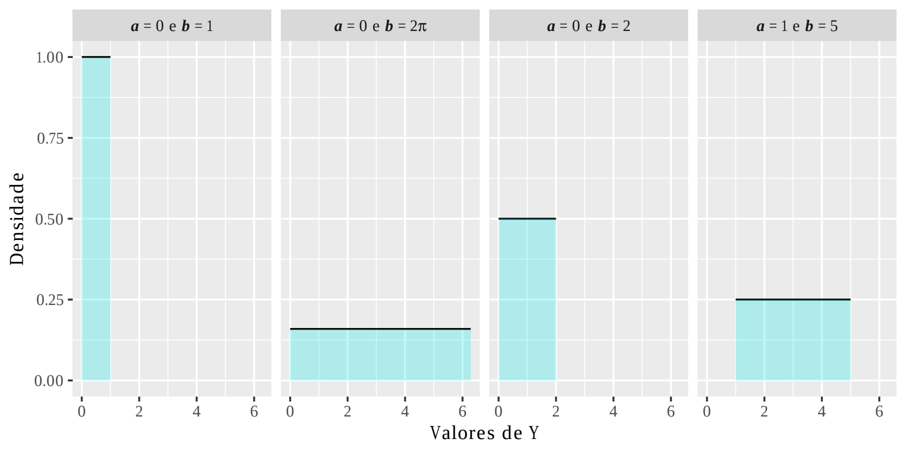


Figura 3. Gráficos para a distribuição Uniforme Contínua.

Exemplo: envase de detergente

Uma máquina envasa detergente líquido de forma que o volume tem distribuição Uniforme Contínua com $4900 \leq y \leq 5050$ ml.

1. Qual a média e variância do volume de detergente?
2. Qual a proporção de embalagens com menos de 5000 ml (5L, valor do rótulo)?
3. Se a regulamentação diz que tolera apenas 10% das embalagens com volume inferior a 5000 ml, no mínimo em quanto o fabricante deve deslocar o intervalo para estar dentro das especificações?

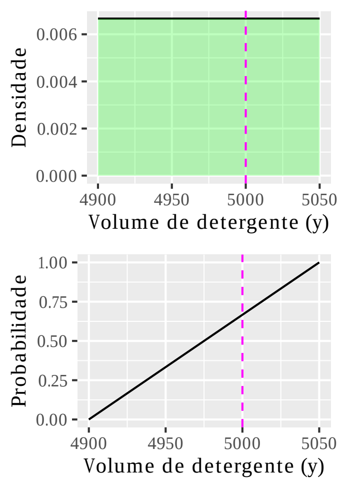


Figura 4. Gráficos da distribuição para o exercício.

Solução

1. Média e variância são obtidos aplicando-se as expressões,

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{4900+5050}{2} = 4975. \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5050-4900)^2}{12} = 1875.$$

2. Pelo gráfico da densidade é imediato ver que vale 2/3, mas a conta é

$$F(y) = \frac{y-a}{b-a} \quad \Rightarrow \quad F(5000) = \frac{5000-4900}{5050-4900} = 0.667.$$

3. Pela inversa da $F(y)$ pode-se determinar o volume y correspondente à proporção de 0.1,

$$p = F(y) - F(a) = \tfrac{y-a}{b-a} - \tfrac{a-a}{b-a} = \tfrac{y-a}{b-a} \quad \Rightarrow \quad y = a + p \cdot (b-a)$$
$$y = 4900 + 0.1 \cdot (5050 - 4900) = 4915 \text{ ml}.$$

Deve deslocar o intervalo em no mínimo $m = 5000 - 4915 = 85$ ml para ter apenas 10% de embalagens com menos de 5000 ml.

Geração de números aleatórios

- A mais importante aplicação de uma v.a. Uniforme Contínua é na **Geração de Números Aleatórios** de outras distribuições.
- Números aleatórios são usados para:
  - Embaralhar as canções da sua playlist.
  - Em filtros do Instagram (jogo das perguntas, que animal você é).
  - Calcular probabilidades.
  - Realizar integração de funções complexas.
  - Fazer simulações computacionais de fenômenos naturais.

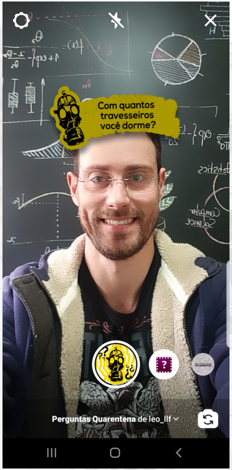
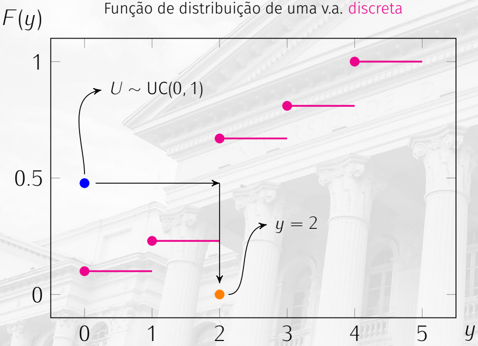


Figura 5. Jogo das perguntas.

Intuição sobre a geração de números aleatórios



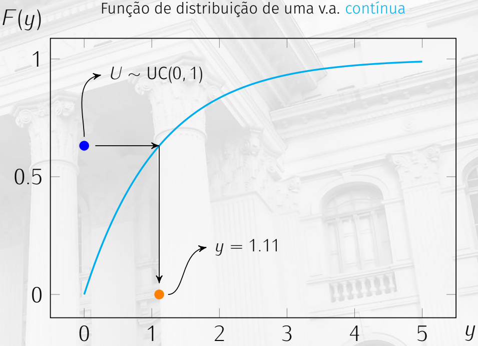


Figura 6. Intuição sobre a geração de números aleatórios pelo método da inversa da função de distribuição.

Distribuição Exponencial

Características de uma v.a. de distribuição Exponencial

Uma variável aleatória tem distribuição Exponencial se as seguintes condições são atendidas.

1. O resultado do experimento aleatório é uma v.a. **não negativa**, ou seja, $y \geq 0$.
2. Considerando o caso em que Y é o **comprimento do intervalo** entre a ocorrência de eventos ao longo do tempo (chamadas telefônicas, falhas operacionais, chuva, etc), o **número de eventos** em intervalos de comprimento fixo e disjuntos tem distribuição de Poisson.
3. Decorre de 2 (do processo de Poisson) que a taxa instantânea de risco de um evento é constante.

Exemplos de v.a. com distribuição Exponencial

1. Tempo de duração de uma lâmpada.
2. Tempo até a falha de uma máquina industrial.
3. Intervalo de tempo entre visualizações de um vídeo no YouTube.
4. O intervalo de tempo entre os pousos de abelhas em uma colmeia.
5. O intervalo de tempo entre o estouro de rojões.
6. Distância entre fraturas ou buracos no asfalto de uma rodovia.

*As suposições precisam ser atendidas.

Figura 7. Explosão de fogos de artifício. Foto de Anna-Louise no Pexels.

Distribuição Exponencial

A variável aleatória Y tem distribuição Exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(y) = \lambda \exp\{-\lambda y\}, \quad y \geq 0.$$

Denotamos por $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.

A função de distribuição da Exponencial apresenta forma analítica, obtida por integração,

$$F(y) = \text{P}(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \lambda \exp\{-\lambda u\}\,\text{d}u = 1 - \exp\{-\lambda y\}.$$

Por fim, a média e a variância de Y são

$$\mu = \text{E}(Y) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \text{V}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

.

Gráfico da distribuição Exponencial

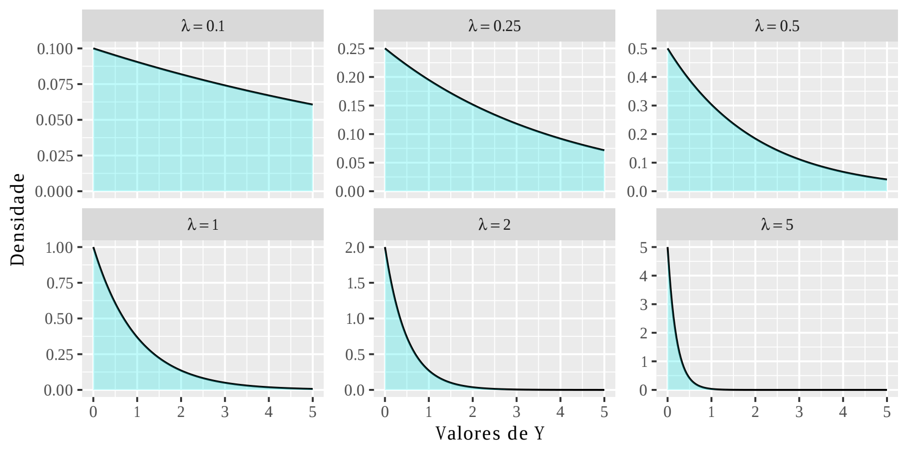


Figura 8. Gráficos para a distribuição Exponencial.

Exemplo: duração de atendimentos

A duração do atendimento de cada cliente no caixa de um supermercado tem distribuição Exponencial com tempo médio de atendimento de 5 minutos.

1. Determine λ.
2. Qual a probabilidade de um atendimento durar menos de 1 minuto?
3. Se um cliente entra na fila tendo 6 clientes antes dele, considerando independência entre os atendimentos, em média, quanto tempo ele irá esperar para ser atendido?
4. Qual a probabilidade de ser atendido antes de 15 minutos?

Figura 9. Casal passando as compras no caixa. Foto de Jack Sparrow no Pexels.

Solução

1. Aplica-se a fórmula do valor esperado
$$\mu = 1/\lambda \Rightarrow \lambda = 1/\mu = 1/5 = 0.200.$$
2. Utiliza-se a função de distribuição
$$F(1) = 1 - \exp\{-0.2 \cdot 1\} = 0.181.$$
3. Usa-se a propriedade da média. O tempo de atendimento de cada cliente é Y_i ($i \in \{1, \ldots, 6\}$), assim
$$\text{E}(Y_1 + \cdots + Y_6) = \text{E}(Y_1) + \cdots + \text{E}(Y_6) = 6 \cdot \text{E}(Y) = 30.$$
4. A soma de k v.a. Exponenciais independentes é uma v.a. Gama, que será vista adiante. Apenas por curiosidade, o resultado é
$$Y_s = Y_1 + \cdots + Y_k \sim \text{Gama}(k, \lambda)$$
$$F_{Y_s}(15) = 0.084.$$

A falta de memória

- A distribuição exponencial é empregada na modelagem do **tempo de vida** de equipamentos, componentes, sistemas, etc. em contextos industriais.
- Da mesma forma, usa-se em contextos médicos para modelar o tempo até a cura ou óbito de pacientes.
- A distribuição exponencial tem como característica a **falta de memória**, segundo a qual

$$\text{P}(Y > y + a | Y > y) = \text{P}(Y > a), \quad \text{para qualquer } a > 0.$$

Isso também quer dizer que a sua **função de risco** é constante.

Figura 10. Celular danificado. Foto de Skitterphoto no Pexels.

Função de risco

A função de risco de uma v.a. é definida por

$$h(y) = \frac{f(y)}{1 - F(y)}$$

em que f é a função de densidade de probabilidade e F a função de distribuição.

Falta de memória indica que a propensão à falha independe do tempo decorrido. Na prática, a suposição quer dizer que a chance de um carro velho falhar é a mesma de um carro novo.

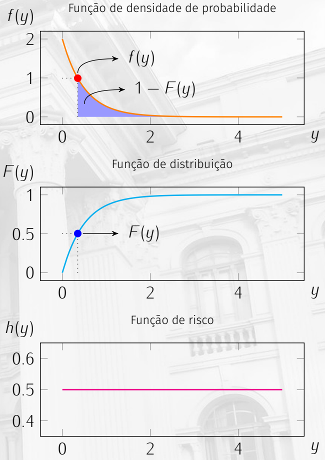


Figura 11. Função de risco para a distribuição Exponencial.

Relação entre Exponencial e Poisson

Se o **intervalo entre eventos** tem distribuição Exponencial, então o **número de eventos** em intervalos disjuntos de mesmo comprimento tem distribuição de Poisson.

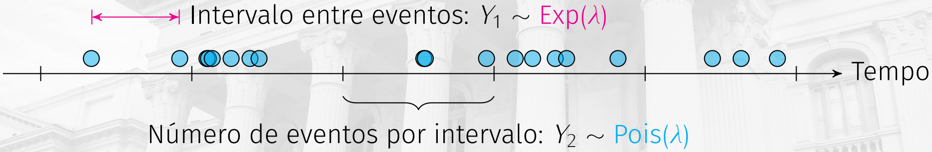


Figura 12. Relação entre Exponencial e Poisson para eventos ao longo do tempo. O intervalo tem tamanho 1.

Outras relações com a Exponencial

A Exponencial é **caso particular** de duas outras distribuições que serão vistas:

- Distribuição Gama.
- Distribuição de Weibull.

Essas distribuições generalizam a Exponencial e por isso são **mais flexíveis**.

- Têm mais de um parâmetro.
- A função de risco não é mais constante.
- Também são aplicadas nos mesmos contextos que a Exponencial.

Considerações finais

Considerações finais

Revisão

- Modelos probabilísticos contínuos.
  - Distribuição Uniforme Contínua.
  - Distribuição Exponencial.
- Fundamentação e propriedades.
- Exemplos de aplicação.