

Componentes de testes de hipótese

Prof. Paulo Justiniano Ribeiro Junior

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná



- ▶ **Fundamentos de testes de hipóteses.**
 - ▶ **Hipóteses estatísticas.**
 - ▶ **Significância e tipos de erro.**
 - ▶ **Tipos de testes.**
 - ▶ **Estatísticas de teste.**
 - ▶ **Nível descritivo (p -valor).**
 - ▶ Testes para médias.
 - ▶ Testes para variâncias.
 - ▶ Testes para proporções.



Figura 1. Foto de James Wheeler no Pexels.

Testes de hipótese

Hipótese

É uma afirmativa sobre uma **propriedade** da população.

Teste de hipótese

- ▶ É um procedimento para se testar uma **afirmativa** sobre uma propriedade da população.
- ▶ Permite tomar **decisões** sobre a população com base em informações de dados amostrais.



Figura 2. Cena do filme Os Incríveis.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. **Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).**
2. Definir um nível de significância α , que irá determinar o nível de confiança $100(1 - \alpha)\%$ do teste.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste \rightarrow valor calculado.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α \rightarrow valor crítico.
6. Concluir o teste.

1. Definição de hipóteses · tipos de hipótese

Hipótese nula H_0

- ▶ É uma afirmativa de que o valor de um parâmetro populacional é **igual** a algum valor especificado.
- ▶ O termo *nula* é usado para indicar nenhuma mudança ou nenhum efeito.
- ▶ Exemplos:

$$\mu = 10$$

$$p = 0.5$$

$$\sigma^2 = 4.$$

Hipótese alternativa H_a

- ▶ É uma afirmativa de que o parâmetro tem um valor que, de alguma forma, **difere** da hipótese nula.
- ▶ Exemplos:

$$\mu \neq 10$$

$$p > 0.5$$

$$\sigma^2 < 4.$$

1. Definição de hipóteses · decisões sobre a hipótese

Quando fazemos um teste de hipótese, chegamos a um dos dois possíveis resultados:

- ▶ **Rejeitar** H_0 : em favor da hipótese alternativa H_a .
- ▶ **Não rejeitar** H_0 : e conclui-se que não existem diferenças.

Atenção!

- ▶ O termo **aceitar** a hipótese nula é filosoficamente incorreto, pois não se pode aceitar uma hipótese baseada apenas em evidências amostrais.
- ▶ E ainda existe um **erro** associado a todo teste de hipótese.

1. Definição de hipóteses · a hipótese alternativa

Teoria do falsificacionismo de K. Popper

- ▶ Uma hipótese **não pode ser provada**, apenas **desprovada**.
- ▶ Se a hipótese permanece válida então ela **não é validada**, mas adquire um certo “**grau de confiança**”.
- ▶ Se você está fazendo um estudo e deseja usar um teste de hipótese para **apoiar** sua afirmativa, esta deve ser escrita de modo a se tornar a **hipótese alternativa**.
- ▶ Você nunca pode apoiar uma afirmativa de que um parâmetro **seja igual** a algum valor específico.
- ▶ Nesse contexto de se tentar apoiar o resultado de pesquisa, a hipótese alternativa é, algumas vezes, chamada de **hipótese de pesquisa**.

1. Definição de hipóteses · exemplo

Em um estudo sobre a proporção sexual de peixes de uma mesma espécie em uma lagoa, deseja-se testar a hipótese de que a proporção de fêmeas é maior do que a proporção de machos.

- ▶ Supondo inicialmente que a proporção de fêmeas é de 50% ($p = 0.5$), então

$$H_0 : p = 0.5 \quad \text{vs} \quad H_a : p > 0.5$$

- ▶ Com isso, deseja-se que a **hipótese nula** $p = 0.5$ seja rejeitada, de modo que a **hipótese alternativa** $p > 0.5$ seja apoiada.
- ▶ Apoiar a hipótese alternativa de que $p > 0.5$ é o mesmo que apoiar a afirmativa de que a proporção de fêmeas na população é maior do que a de machos.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. **Definir um nível de significância α , que irá determinar o nível de confiança $100(1 - \alpha)\%$ do teste.**
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste \rightarrow valor calculado.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível. de significância α \rightarrow valor crítico.
6. Concluir o teste.

2. Nível de significância · erros de decisão

Para entendermos o que é o nível de significância (α), precisamos saber que, ao realizar um teste de hipótese, estamos sujeitos a dois tipos de erros.

- ▶ **Erro Tipo I:** rejeitar H_0 , quando H_0 é verdadeira (falso negativo).
- ▶ **Erro Tipo II:** não rejeitar H_0 , quando H_0 é falsa (falso positivo).

| | H_0 verdadeira | H_0 falsa |
|--------------------|------------------|-----------------|
| Não rejeitar H_0 | Decisão correta | Erro tipo II |
| Rejeitar H_0 | Erro tipo I | Decisão correta |

2. Nível de significância · ilustração dos erros



Figura 3. Erros de decisão em testes de hipótese. Modificado de www.irishmirror.ie.

2. Nível de significância · definição dos erros

Definimos por α e β as probabilidades de cometer os erros do tipo I e II:

- ▶ $\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}).$
- ▶ $\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}).$
 - ▶ α é o **nível de significância** do teste.
 - ▶ $1 - \alpha$ é o **nível de confiança** do teste.

No exemplo anterior, se $H_0 : p = 0.5$ e $H_a : p > 0.5$, então:

- ▶ $\alpha = P(\text{concluir que a proporção de fêmeas é maior quando na verdade não é}).$
- ▶ $\beta = P(\text{concluir que a proporção sexual é igual quando na verdade não é}).$

2. Nível de significância · balanço entre os erros

- ▶ A situação ideal é aquela em que ambas as probabilidades, α e β , são próximas de zero.
- ▶ No entanto, à medida que diminuimos α , a probabilidade β tende a aumentar.
- ▶ Levando isso em conta, ao formular as hipóteses, **devemos cuidar para que o erro (usualmente) mais importante a ser evitado seja o erro do tipo I.**
- ▶ Por isso, a probabilidade α recebe o nome de **nível de significância** do teste, e é esse erro que devemos controlar.

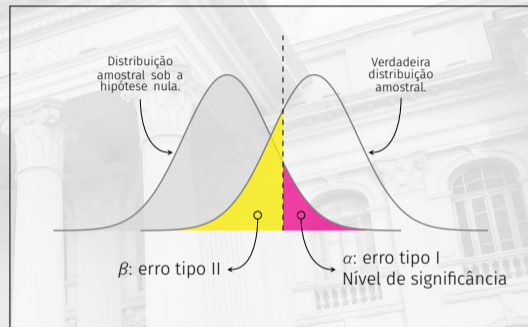


Figura 4. Probabilidade dos tipos de erros em testes de hipótese.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir um nível de significância α , que irá determinar o nível de confiança $100(1 - \alpha)\%$ do teste.
3. **Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.**
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste → valor calculado.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α → valor crítico.
6. Concluir o teste.

3. Tipos de testes

A hipótese alternativa determinará o **sentido** do teste de hipótese, que pode ser:

- ▶ Bilateral:

$$H_a : \theta \neq \theta_0.$$

- ▶ Unilateral à esquerda:

$$H_a : \theta < \theta_0.$$

- ▶ Unilateral à direita:

$$H_a : \theta > \theta_0.$$

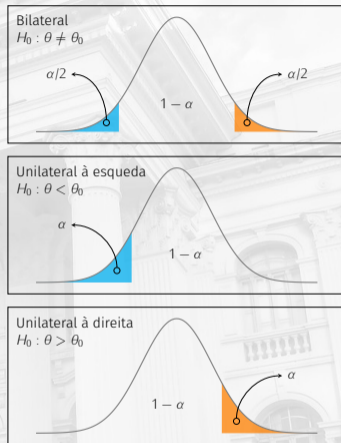


Figura 5. A região de rejeição de H_0 conforme o tipos de hipótese alternativa.

3. Tipos de testes · bilateral

Uma hipótese do tipo

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_a : \theta \neq \theta_0$$

é **bilateral**.

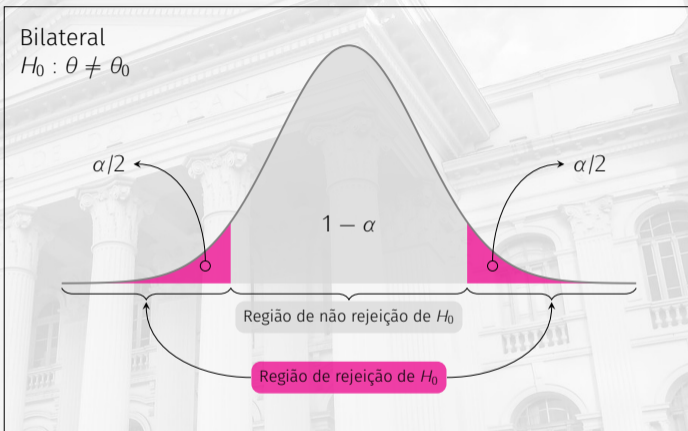


Figura 6. A região de rejeição de H_0 para uma hipótese alternativa bilateral.

3. Tipos de testes · unilateral à esquerda

Uma hipótese do tipo

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_a : \theta < \theta_0$$

é **unilateral à esquerda**.

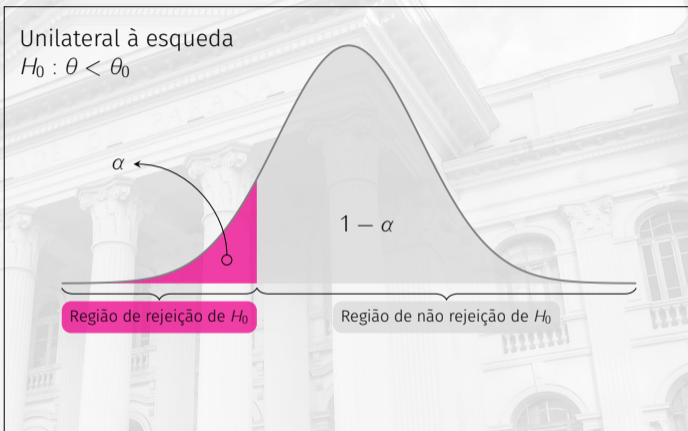


Figura 7. A região de rejeição de H_0 para uma hipótese alternativa unilateral à esquerda.

3. Tipos de testes · unilateral à direita

Uma hipótese do tipo

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_a : \theta > \theta_0$$

é **unilateral à direita**.

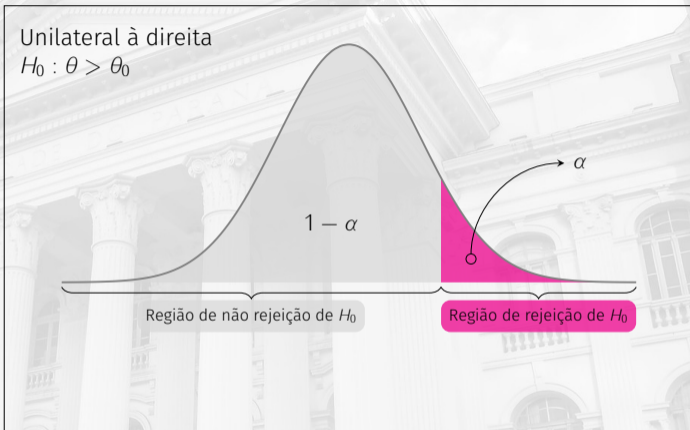


Figura 8. A região de rejeição de H_0 para uma hipótese alternativa unilateral à direita.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir um nível de significância α , que irá determinar o nível de confiança $100(1 - \alpha)\%$ do teste.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. **Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste → valor calculado.**
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α → valor crítico.
6. Concluir o teste.

4. Estatística de teste

A **estatística de teste** é um valor usado para tomar a decisão sobre a hipótese nula, supondo que ela seja verdadeira.

Considera a distribuição amostral do estimador **sob a hipótese nula**.

Estatística de teste para a **média** (μ)

$$z = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\bar{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Estatística de teste para a **proporção** (p)

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

Estatística de teste para a **variância** (σ^2)

$$\chi^2 = \frac{(n - 1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir um nível de significância α , que irá determinar o nível de confiança $100(1 - \alpha)\%$ do teste.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste \rightarrow valor calculado.
5. **Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância $\alpha \rightarrow$ valor crítico.**
6. Concluir o teste.

5. Região crítica · definição

- ▶ A estatística de teste **sozinha** não nos dá informação suficiente para a tomada de decisão sobre a afirmativa em um teste.
- ▶ É necessário comparar esta estatística com algum **valor de referência**, que nos informe o quão extrema é a estatística de teste para rejeição de H_0 .
- ▶ Este valor de referência é chamado de **valor crítico**, que divide a região de rejeição da região de não rejeição da hipótese nula. Depende:
 - ▶ Da distribuição amostral da estatística de teste sob H_0 .
 - ▶ Do nível de significância α .
- ▶ A **região crítica** de um teste de hipótese é a **região de rejeição** da hipótese nula.

5. Região crítica · exemplos

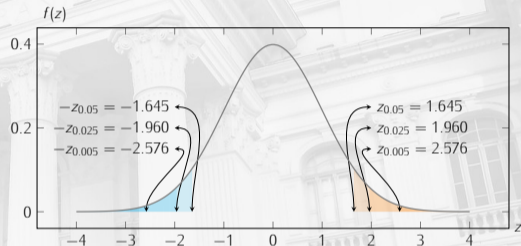
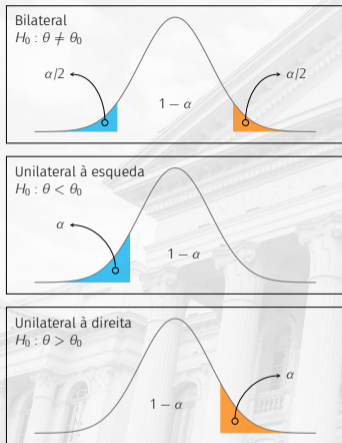


Figura 10. Valores críticos para determinar a região crítica.

Figura 9. A região de rejeição de H_0 conforme o tipos de hipótese alternativa.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir um nível de significância α , que irá determinar o nível de confiança $100(1 - \alpha\%)$ do teste.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste → valor calculado.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α → valor crítico.
6. **Concluir o teste.**

6. Conclusão do teste · valor da estatística

Com base na estatística de teste e valor crítico

- ▶ Se a estatística de teste estiver **dentro** da região crítica → **rejeita** H_0 .
- ▶ Se a estatística de teste estiver **fora** da região crítica → **não rejeita** H_0 .

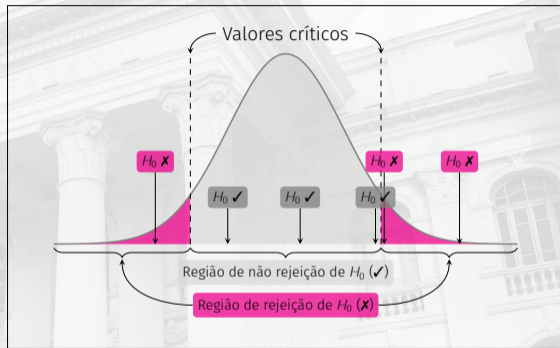


Figura 11. Decisões conforme o valor da estatística de teste.

6. Conclusão do teste · nível descritivo

Com base no nível descritivo ou p -valor

- ▶ Em geral, α é pré-fixado para construir a regra de decisão.
- ▶ Uma alternativa é deixar em aberto a escolha de α para quem for tomar a decisão.
- ▶ A ideia é calcular, **supondo que a hipótese nula é verdadeira**, a probabilidade de se obter **estatísticas mais extremas** do que aquela fornecida pela amostra.
- ▶ Essa probabilidade é chamada de **nível descritivo**, denotada por α^* (ou **p -valor**).
- ▶ Valores pequenos de α^* **evidenciam** que a hipótese nula é falsa.
- ▶ O conceito de “pequeno” **fica para quem decide** qual α deve usar para comparar com α^* .

6. Conclusão do teste · ilustração do caso unilateral

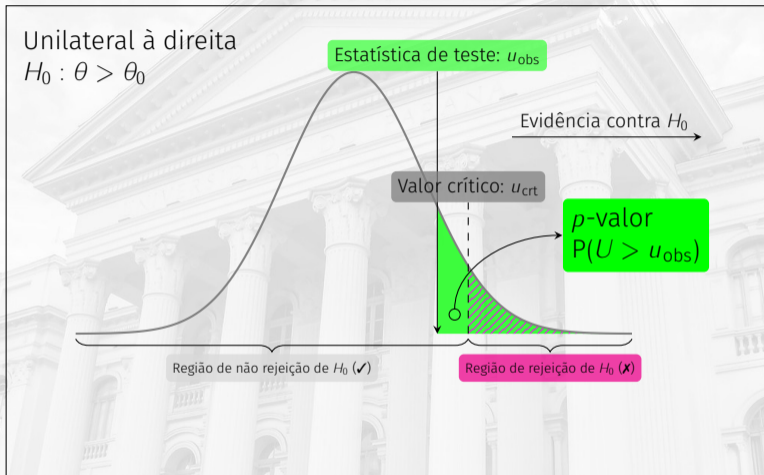


Figura 12. Nível descritivo para um teste com hipótese unilateral à direita.

6. Conclusão do teste · ilustração do caso bilateral

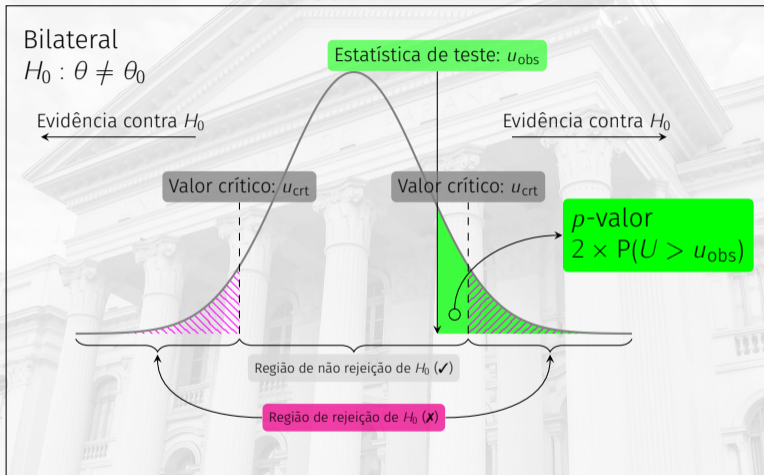


Figura 13. Nível descritivo para um teste com hipótese bilateral.

6. Conclusão do teste · formalização do p-valor

Com base no nível descritivo ou p -valor

Para **testes unilaterais**, sendo $H_0 : \theta = \theta_0$, a expressão de α^* depende da hipótese alternativa:

$$\alpha^* = P(U < u_{\text{obs}} \mid H_0 \text{ verdadeira}) \quad \text{para } H_a : \theta < \theta_0$$

$$\alpha^* = P(U > u_{\text{obs}} \mid H_0 \text{ verdadeira}) \quad \text{para } H_a : \theta > \theta_0,$$

em que U é a estatística de teste, u_{obs} o seu valor observado.

Para **testes bilaterais**, temos $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_0 : \theta \neq \theta_0$, a definição do nível descritivo depende da relação entre u_{obs} e θ_0 :

$$\alpha^* = 2 \times P(U < u_{\text{obs}} \mid H_0 \text{ verdadeira}) \quad \text{se } u_{\text{obs}} < \theta_0$$

$$\alpha^* = 2 \times P(U > u_{\text{obs}} \mid H_0 \text{ verdadeira}) \quad \text{se } u_{\text{obs}} > \theta_0.$$

Como estamos calculando a probabilidade para apenas uma das caudas, então esse valor é multiplicado por 2.

Relação de teste de hipótese com intervalo de confiança

Seja $IC_{1-\alpha}(\theta)$ o **intervalo de confiança** de $100(1 - \alpha)\%$ para o parâmetro θ .

O **teste de hipótese** com nível de significância α para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_a : \theta \neq \theta_0$$

conduzirá à rejeição de H_0 , se e somente se, θ_0 **não** estiver contido no $IC_{1-\alpha}(\theta)$.

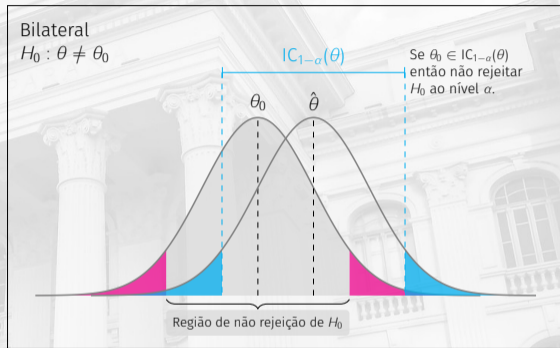


Figura 14. Relação entre teste de hipótese e intervalo de confiança.

- ▶ Testes de hipótese são ferramentas estatísticas para **tomada de decisão sob incerteza**.
- ▶ Os **procedimentos gerais** para a realização de qualquer teste serão sempre os **mesmos**.
- ▶ Os testes de hipótese são estritamente **relacionados** com os intervalos de confiança.

- ▶ **Fundamentos de testes de hipóteses.**

- ▶ **Hipóteses estatísticas.**

- ▶ **Significância e tipos de erro.**
 - ▶ **Tipos de testes.**
 - ▶ **Estatísticas de teste.**
 - ▶ **Nível descritivo (p -valor).**

- ▶ Testes para médias.
 - ▶ Testes para variâncias.
 - ▶ Testes para proporções.



Figura 15. Foto de James Wheeler no Pexels.