Componentes de testes de hipótese

Prof. Paulo Justiniano Ribeiro Junior

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Tópicos

- **Fundamentos de testes de hipóteses.**
  - **Hipóteses estatísticas.**
    - **Significância e tipos de erro.**
    - **Tipos de testes.**
    - **Estatísticas de teste.**
    - **Nível descritivo (p-valor).**
- Testes para médias.
- Testes para variâncias.
- Testes para proporções.

Figura 1. Foto de James Wheeler no Pexels.

Testes de hipótese

Hipótese

É uma afirmativa sobre uma **propriedade** da população.

Teste de hipótese

- É um procedimento para se testar uma **afirmativa** sobre uma propriedade da população.
- Permite tomar **decisões** sobre a população com base em informações de dados amostrais.

Figura 2. Cena do filme Os Incríveis.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. **Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).**
2. Definir um nível de significância α, que irá determinar o nível de confiança $100(1-\alpha)\%$ do teste.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste $\rightarrow$ valor calculado.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α $\rightarrow$ valor crítico.
6. Concluir o teste.

1. Definição de hipóteses · tipos de hipótese

Hipótese nula H_0

- É uma afirmativa de que o valor de um parâmetro populacional é **igual** a algum valor especificado.
- O termo *nula* é usado para indicar nenhuma mudança ou nenhum efeito.
- Exemplos:

$$\begin{aligned} \mu &= 10 \\ p &= 0.5 \\ \sigma^2 &= 4. \end{aligned}$$

Hipótese alternativa H_a

- É uma afirmativa de que o parâmetro tem um valor que, de alguma forma, **difere** da hipótese nula.
- Exemplos:

$$\begin{aligned} \mu &\neq 10 \\ p &> 0.5 \\ \sigma^2 &< 4. \end{aligned}$$

1. Definição de hipóteses · decisões sobre a hipótese

Quando fazemos um teste de hipótese, chegamos a um dos dois possíveis resultados:

- **Rejeitar** H_0: em favor da hipótese alternativa H_a.
- **Não rejeitar** H_0: e conclui-se que não existem diferenças.

Atenção!

- O termo **aceitar** a hipótese nula é filosoficamente incorreto, pois não se pode aceitar uma hipótese baseada apenas em evidências amostrais.
- E ainda existe um **erro** associado a todo teste de hipótese.

1. Definição de hipóteses · a hipótese alternativa

Teoria do falsificacionismo de K. Popper

- Uma hipótese **não pode ser provada**, apenas **desprovada**.
- Se a hipótese permanece válida então ela **não é validada**, mas adquire um certo "**grau de confiança**".

- Se você está fazendo um estudo e deseja usar um teste de hipótese para **apoiar** sua afirmativa, esta deve ser escrita de modo a se tornar a **hipótese alternativa**.
- Você nunca pode apoiar uma afirmativa de que um parâmetro **seja igual** a algum valor específico.
- Nesse contexto de se tentar apoiar o resultado de pesquisa, a hipótese alternativa é, algumas vezes, chamada de **hipótese de pesquisa**.

1. Definição de hipóteses · exemplo

Em um estudo sobre a proporção sexual de peixes de uma mesma espécie em uma lagoa, deseja-se testar a hipótese de que a proporção de fêmeas é maior do que a proporção de machos.

- Supondo inicialmente que a proporção de fêmeas é de 50% ($p = 0.5$), então

$$H_0 : p = 0.5 \quad \text{vs} \quad H_a : p > 0.5$$

- Com isso, deseja-se que a **hipótese nula** $p = 0.5$ seja rejeitada, de modo que a **hipótese alternativa** $p > 0.5$ seja apoiada.
- Apoiar a hipótese alternativa de que $p > 0.5$ é o mesmo que apoiar a afirmativa de a proporção de fêmeas na população é maior do que a de machos.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. **Definir um nível de significância** α**, que irá determinar o nível de confiança** $100(1-\alpha)$**% do teste**.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste $\rightarrow$ valor calculado.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível. de significância α $\rightarrow$ valor crítico.
6. Concluir o teste.

2. Nível de significância · erros de decisão

Para entendermos o que é o nível de significância (α), precisamos saber que, ao realizar um teste de hipótese, estamos sujeitos a dois tipos de erros.

- **Erro Tipo I**: rejeitar H_0, quando H_0 é verdadeira (falso negativo).
- **Erro Tipo II**: não rejeitar H_0, quando H_0 é falsa (falso positivo).

	H_o **verdadeira**	H_o **falsa**
Não rejeitar H_0	Decisão correta	Erro tipo II
Rejeitar H_0	Erro tipo I	Decisão correta

2. Nível de significância · ilustração dos erros

Figura 3. Erros de decisão em testes de hipótese. Modificado de www.irishmirror.ie.

2. Nível de significância · definição dos erros

Definimos por α e β as probabilidades de cometer os erros do tipo I e II:

- $\alpha = \text{P(erro tipo I)} = \text{P(rejeitar } H_0 \,|\, H_0 \text{ verdadeira)}$.
- $\beta = \text{P(erro tipo II)} = \text{P(não rejeitar } H_0 \,|\, H_0 \text{ falsa)}$.
  - α é o **nível de significância** do teste.
  - $1 - \alpha$ é o **nível de confiança** do teste.

No exemplo anterior, se $H_0 : p = 0.5$ e $H_a : p > 0.5$, então:

- $\alpha = $ P(concluir que a proporção de fêmeas é maior quando na verdade não é).
- $\beta = $ P(concluir que a proporção sexual é igual quando na verdade não é).

2. Nível de significância · balanço entre os erros

- A situação ideal é aquela em que ambas as probabilidades, α e β, são próximas de zero.
- No entanto, à medida que diminuimos α, a probabilidade β tende a aumentar.
- Levando isso em conta, ao formular as hipóteses, **devemos cuidar para que o erro (usualmente) mais importante a ser evitado seja o erro do tipo I**.
- Por isso, a probabilidade α recebe o nome de **nível de significância** do teste, e é esse erro que devemos controlar.

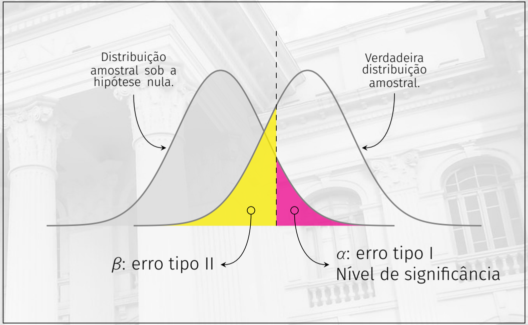

Figura 4. Probabilidade dos tipos de erros em testes de hipótese.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir um nível de significância α, que irá determinar o nível de confiança $100(1-\alpha)\%$ do teste.
3. **Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa**.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste $\rightarrow$ valor calculado.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α $\rightarrow$ valor crítico.
6. Concluir o teste.

3. Tipos de testes

A hipótese alternativa determinará o **sentido** do teste de hipótese, que pode ser:

- Bilateral:

$$H_a : \theta \neq \theta_0.$$

- Unilateral à esquerda:

$$H_a : \theta < \theta_0.$$

- Unilateral à direita:

$$H_a : \theta > \theta_0.$$

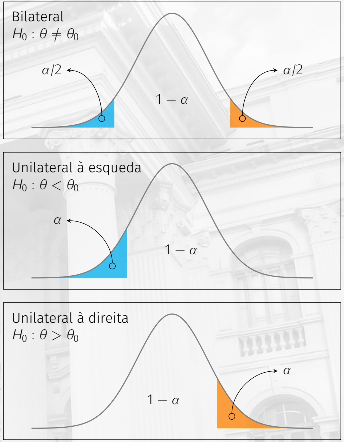

Figura 5. A região de rejeição de H_0 conforme o tipos de hipótese alternativa.

Uma hipótese do tipo

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_a : \theta \neq \theta_0$$

é **bilateral**.

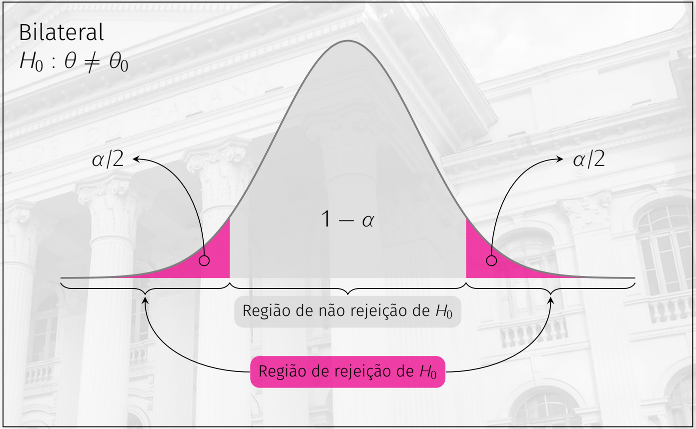

Figura 6. A região de rejeição de H_0 para uma hipótese alternativa bilateral.

Uma hipótese do tipo

$$H_0: \theta = \theta_0$$
$$H_a: \theta < \theta_0$$

é **unilateral à esquerda**.

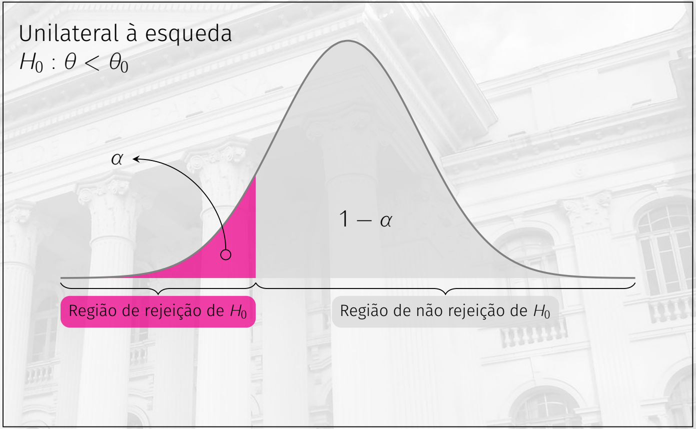

Figura 7. A região de rejeição de H_0 para uma hipótese alternativa unilateral à esquerda.

3. Tipos de testes · unilateral à direita

Uma hipótese do tipo

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \ \theta = \theta_0 \\
H_a &: \ \theta > \theta_0
\end{aligned}
$$

é **unilateral à direita**.

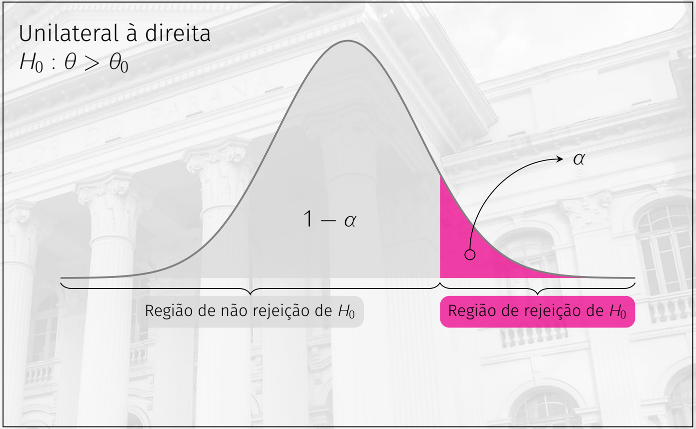

Figura 8. A região de rejeição de H_0 para uma hipótese alternativa unilateral à direita.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir um nível de significância α, que irá determinar o nível de confiança $100(1-\alpha)\%$ do teste.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. **Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste** $\rightarrow$ **valor calculado**.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α $\rightarrow$ valor crítico.
6. Concluir o teste.

4. Estatística de teste

A **estatística de teste** é um valor usado para tomar a decisão sobre a hipótese nula, supondo que ela seja verdadeira.

Considera a distribuição amostral do estimador **sob a hipótese nula**.

Estatística de teste para a **média** (μ)

$$z = \frac{\overline{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\overline{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

Estatística de teste para a **proporção** (p)

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}.$$

Estatística de teste para a **variância** (σ^2)

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}.$$

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir um nível de significância α, que irá determinar o nível de confiança $100(1-\alpha)\%$ do teste.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste $\rightarrow$ valor calculado.
5. **Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância** α $\rightarrow$ **valor crítico**.
6. Concluir o teste.

5. Região crítica · definição

- A estatística de teste **sozinha** não nos dá informação suficiente para a tomada de decisão sobre a afirmativa em um teste.
- É necessário comparar esta estatística com algum **valor de referência**, que nos informe o quão extrema é a estatística de teste para rejeição de H_0.
- Este valor de referência é chamado de **valor crítico**, que divide a região de rejeição da região de não rejeição da hipótese nula. Depende:
  - Da distribuição amostral da estatística de teste sob H_0.
  - Do nível de significância α.
- A **região crítica** de um teste de hipótese é a **região de rejeição** da hipótese nula.

5. Região crítica · exemplos

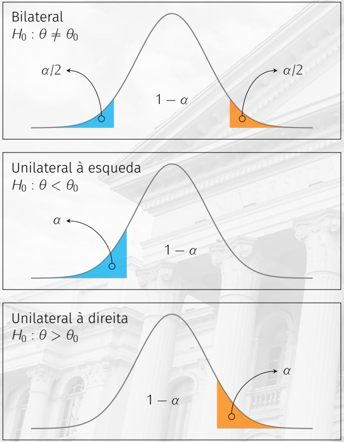

Figura 9. A região de rejeição de H_0 conforme o tipos de hipótese alternativa.

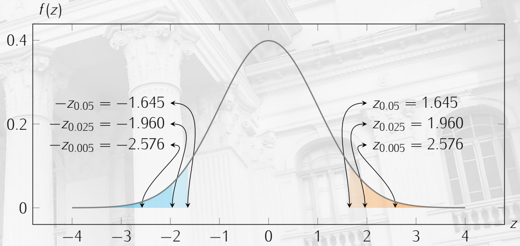

Figura 10. Valores críticos para determinar a região crítica.

Procedimentos gerais para um teste de hipótese

1. Definir a hipótese nula (H_0) e a alternativa (H_a).
2. Definir um nível de significância α, que irá determinar o nível de confiança $100(1 - \alpha\%)$ do teste.
3. Definir o tipo de teste, com base na hipótese alternativa.
4. Calcular a estatística de teste, com base na distribuição amostral do estimador do parâmetro sob teste $\rightarrow$ valor calculado.
5. Determinar a região crítica (região de rejeição), com base no nível de significância α $\rightarrow$ valor crítico.
6. **Concluir o teste**.

Com base na estatística de teste e valor crítico

- Se a estatística de teste estiver **dentro** da região crítica → **rejeita** H_0.
- Se a estatística de teste estiver **fora** da região crítica → **não rejeita** H_0.

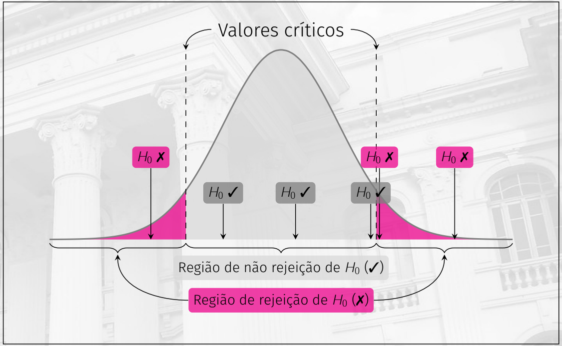

Figura 11. Decisões conforme o valor da estatística de teste.

6. Conclusão do teste · nível descritivo

Com base no nível descritivo ou p-valor

- Em geral, α é pré-fixado para construir a regra de decisão.
- Uma alternativa é deixar em aberto a escolha de α para quem for tomar a decisão.
- A ideia é calcular, **supondo que a hipótese nula é verdadeira**, a probabilidade de se obter **estatísticas mais extremas** do que aquela fornecida pela amostra.
- Essa probabilidade é chamada de **nível descritivo**, denotada por α^* (ou p**-valor**).
- Valores pequenos de α^* **evidenciam** que a hipótese nula é falsa.
- O conceito de "pequeno" **fica para quem decide** qual α deve usar para comparar com α^*.

6. Conclusão do teste · ilustração do caso unilateral

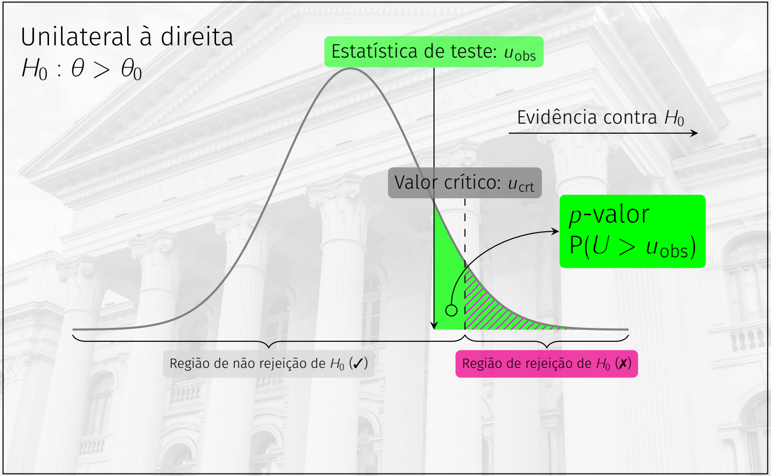

Figura 12. Nível descritivo para um teste com hipótese unilateral à direita.

6. Conclusão do teste · ilustração do caso bilateral

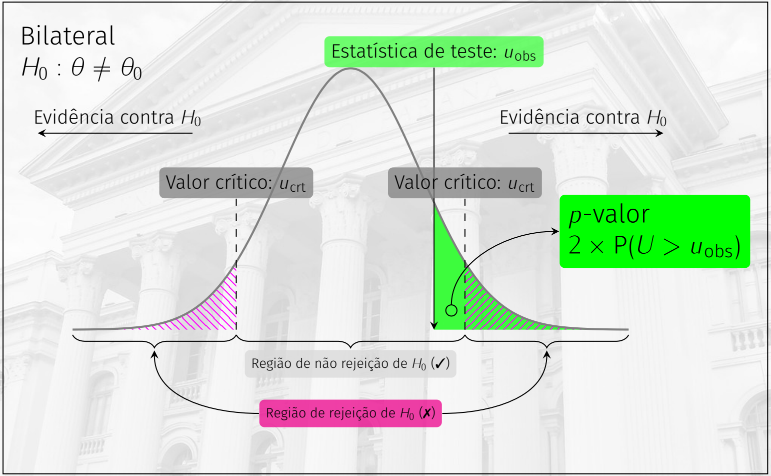

Figura 13. Nível descritivo para um teste com hipótese bilateral.

6. Conclusão do teste · formalização do p-valor

Com base no nível descritivo ou p-valor

Para **testes unilaterais**, sendo $H_0 : \theta = \theta_0$, a expressão de α^* depende da hipótese alternativa:

$$\alpha^* = \mathrm{P}(U < u_{\text{obs}} \,|\, H_0 \text{ verdadeira}) \quad \text{para } H_a : \theta < \theta_0$$
$$\alpha^* = \mathrm{P}(U > u_{\text{obs}} \,|\, H_0 \text{ verdadeira}) \quad \text{para } H_a : \theta > \theta_0,$$

em que U é a estatística de teste, u_{obs} o seu valor observado.

Para **testes bilaterais**, temos $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_0 : \theta \neq \theta_0$, a definição do nível descritivo depende da relação entre u_{obs} e θ_0:

$$\alpha^* = 2 \times \mathrm{P}(U < u_{\text{obs}} \,|\, H_0 \text{ verdadeira}) \quad \text{se } u_{\text{obs}} < \theta_0$$
$$\alpha^* = 2 \times \mathrm{P}(U > u_{\text{obs}} \,|\, H_0 \text{ verdadeira}) \quad \text{se } u_{\text{obs}} > \theta_0.$$

Como estamos calculando a probabilidade para apenas uma das caudas, então esse valor é multiplicado por 2.

Relação de teste de hipótese com intervalo de confiança

Seja $\text{IC}_{1-\alpha}(\theta)$ o **intervalo de confiança** de $100(1-\alpha)\%$ para o parâmetro θ.

O **teste de hipótese** com nível de significância α para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_a : \theta \neq \theta_0$$

conduzirá à rejeição de H_0, se e somente se, θ_0 **não** estiver contido no $\text{IC}_{1-\alpha}(\theta)$.

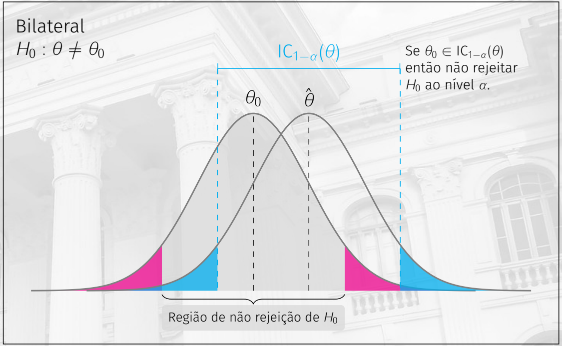

Figura 14. Relação entre teste de hipótese e intervalo de confiança.

Resumo da unidade

- Testes de hipótese são ferramentas estatísticas para **tomada de decisão sob incerteza**.
- Os **procedimentos gerais** para a realização de qualquer teste serão sempre os **mesmos**.
- Os testes de hipótese são estritamente **relacionados** com os intervalos de confiança.

Estrutura da unidade

- **Fundamentos de testes de hipóteses.**
  - **Hipóteses estatísticas.**
    - **Significância e tipos de erro.**
    - **Tipos de testes.**
    - **Estatísticas de teste.**
    - **Nível descritivo (p-valor).**
- Testes para médias.
- Testes para variâncias.
- Testes para proporções.

Figura 15. Foto de James Wheeler no Pexels.