Testes Qui-quadrado para aderência e associação

Prof. Walmes Marques Zeviani

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Conteúdo

Neste vídeo

- Experimentos multinomiais.
- Teste χ^2 para aderência.
- Teste χ^2 para associação.

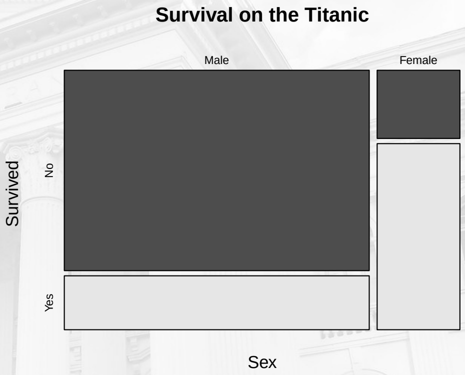

Figura 1. Diagrama de mosaico com dados referentes à tragédia do Titanic.

Teste χ^2 para aderência

Testes de aderência

- Visa determinar se a população da qual provém a amostra tem a distribuição de probabilidades especificada sob hipótese.
- Verifica se o “molde” é a apropriado à amostra.
- Para v.a. qualitativas, veremos o *teste de qui-quadrado*.
- Existem outros testes alternativos.
  - Kolmogorov-Smirnov.
  - Shapiro-Wilk.
  - Anderson-Darling.
  - Etc.

Figura 2. Extraído de kruegerpottery.com.

O experimento multinomial

1. O experimento consiste em n **testes idênticos**.
2. O resultado é apenas um de $k > 1$ possíveis **classes** ou categorias de uma variável qualitativa. Ou seja, os resultados são **mutuamente exclusivos**.
3. A probabilidade de ocorrência de cada uma das k classes é $p_1, p_2, \ldots, p_k$ que são **constantes** em todos os testes, sendo que $p_1 + \ldots + p_k = 1$.
4. Os testes são **independentes**.
5. A variável aleatória de interesse é o **número de ocorrências** de cada classe (a frequência absoluta) $n_1, n_2, \ldots, n_k$.
6. Quando $k = 2$ tem-se uma variável aleatória Binomial.

Exemplo de v.a. multinomial

- Aplica-se a variáveis qualitativas **nominais** e **ordinais**.
- Candidato a vereador escolhido por um eleitor.
- Nota da avaliação de um produto ou app.
- Signo de uma pessoa.
- Bebida do cardápio escolhida pelo cliente.
- Grau de escolaridade de gerente.
- Tipo sanguíneo de uma pessoa.
- Categoria de CNH de um motorista.

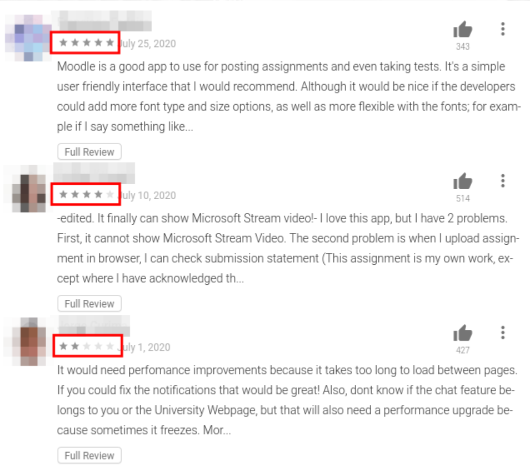

Figura 3. Printscreen da Google Play para o app do Moodle.

O teste de aderência sobre probabilidades multinomiais

- Sejam as **hipóteses** nula e alternativa

$$H_0 : p_1 = p_{01}, p_2 = p_{02}, \cdots, p_k = p_{0k}.$$
$$H_a : \text{pelo menos um } p_i \neq p_{0i}, i \in \{1, \ldots, k\}.$$

- A **estatística de teste** é

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \mathrm{E}(n_i))^2}{\mathrm{E}(n_i)} = \frac{(n_1 - \mathrm{E}(n_1))^2}{\mathrm{E}(n_1)} + \cdots + \frac{(n_k - \mathrm{E}(n_k))^2}{\mathrm{E}(n_k)},$$

em que $\mathrm{E}(n_i) = np_{0i}$ é a **frequência esperada**, ou seja, o número esperado da classe i assumindo que a hipótese nula é verdadeira e n é o tamanho da amostra.

- Rejeita-se a hipótese nula H_0 ao nível de significância α se

$$\chi^2 > \chi^2_\alpha,$$

em que χ^2_α é o **quantil superior** da distribuição qui-quadrado com $k-1$ graus de liberdade.

Exemplo: preferência pela marca de pão

- Um supermercado quer estudar a preferência dos clientes quanto a marca de pão.
- São 3 marcas: A, B e a C (própria do supermercado).
- Existem $n = 150$ registros de compras dos pães, onde apenas 1 deles ocorre (condição para ser mutuamente exclusivo).
- Assume-se que os $n = 150$ clientes são uma amostra aleatória da população de clientes do supermercado interessadas em pães.
- p_1, p_2 e p_3 (desconhecidos) são a proporção de clientes que preferem cada marca.

Figura 4. Foto de Daria Shevtsova no Pexels.

Aplicação: a preferência é igual pelos pães?

- A **hipótese** nula é $H_0 : p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$, ou seja, $np_{0i} = 50$ para qualquer i.
- Com os dados do gráfico, a **estatística de teste** é

$$\chi^2 = \frac{(42-50)^2}{50} + \frac{(65-50)^2}{50} + \frac{(43-50)^2}{50} = 6.76.$$

- O quantil para $\alpha = 0.05$ com 2 graus de liberdade é $\chi^2_{0.05} = 5.991$.
- Portanto, **rejeita-se** a hipótese nula ao nível nominal de 5% de significância.

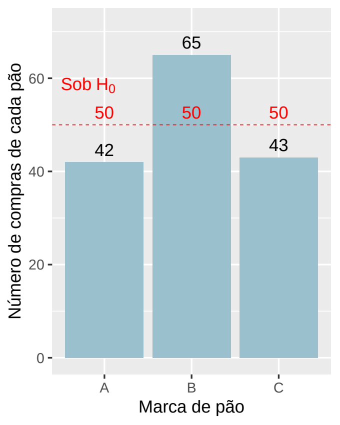

Figura 5. Frequência para cada marca de pão.

Condições requeridas para um teste χ^2 válido

1. Os dados devem vir de um **experimento multinomial**. Isso geralmente é satisfeito quando tem-se uma amostra aleatória da população.
2. Os resultados devem ser **mutuamente exclusivos**.
3. O tamanho da **amostra** n é **grande**. Isso é satisfeito se cada frequência esperada, $\text{E}(n_i)$, for igual ou maior que 5.
4. $\text{E}(n_i) \geq 5$ é necessário para que a aproximação da **distribuição amostral** da estatística do teste usando a qui-quadrado seja boa.
5. **Métodos exatos** para a avaliação destas hipóteses existem mas estão fora do escopo deste material.

Intervalo de confiança para as proporções

Para fazer **intervalos de confiança** para as proporções de cada classe, pode-se usar o que já foi visto para o caso Binomial, ou seja,

$$\text{IC}_{1-\alpha}(p_i) = \left(\hat{p}_i - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{n}}, \hat{p}_i + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{n}}\right),$$

para $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Teste χ^2 para independência

Testes de associação

- Visam determinar a **existência de associação** entre duas ou mais variáveis.
- Para **um par** de variáveis **qualitativas** (ou categóricas), pode-se usar o teste de qui-quadrado para independência.
- Para **um par** de variáveis **quantitativas** pode-se usar o teste de correlação de Pearson.
- As suposições precisam ser atendidas.
- **Associação não implica causalidade**.

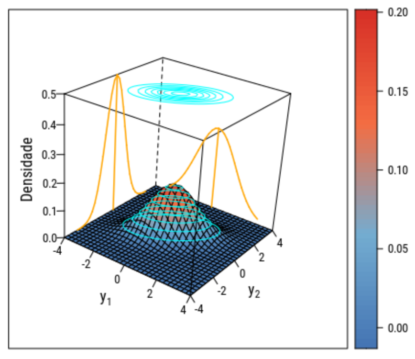

Figura 6. Exemplo da função de densidade conjunta de duas variáveis aleatórias contínuas.

Associação não implica causalidade

Figura 7. Exemplo de que associação não é causa.

Figura 8. Foto de Guy Kawasaki no Pexels.

Independência entre v.a. qualitativas

- Agora o interesse está em testar a independência entre duas (ou mais) v.a. qualitativas: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$.
- Cada uma delas definida a partir de um experimento multinomial. Para o caso de $k = 2$, isto é,

$$
\begin{aligned}
Y_1 &\sim \text{Mult}(p_1, \ldots, p_r) \quad \text{pois } y_{1i} \in \{1, \ldots, r\} \text{ e } \text{P}(Y_1 = y_{1i}) = p_{1i} \\
Y_2 &\sim \text{Mult}(p_1, \ldots, p_c) \quad \text{pois } y_{2j} \in \{1, \ldots, c\} \text{ e } \text{P}(Y_2 = y_{2j}) = p_{2j}.
\end{aligned}
$$

- Em cada unidade amostral, observa-se a k-upla $(Y_1, \ldots, Y_k)$. Para o caso de $k = 2$, isso é o par (Y_1, Y_2).
- Por simplicidade, será apresentado o caso para $k = 2$ variáveis, mas é válido para $k > 2$.

Exemplo: fralda e cerveja

- O gerente de um supermercado suspeita de uma curiosa relação entre venda de fraldas e cerveja.
- Para avaliar tal hipótese, foram extraídas informações sobre presença de cerveja (Y_1) e presença de fraldas (Y_2) na cesta de compras de $n = 313$ clientes ao acaso.

Tabela 1. Número de compras conforme a presença de fralda e cerveja.

	Cerveja = 0	Cerveja = 1	Sum
Fralda = 0	139	46	185
Fralda = 1	85	43	128
Sum	224	89	313

Figura 9. Fotos de Diego Indriago e Polina Tankilevitch no Pexels.

A distribuição conjunta

Se as variáveis aleatórias forem **independentes**, então a distribuição **conjunta** é o produto das distribuições **marginais**. Exemplificando,

$$\frac{185}{313} \cdot \frac{224}{313} \cdot 313 = \frac{185 \cdot 224}{313} = 132.396.$$

Tabela 2. Número esperado para a combinação das variáveis sob a suposição de independência.

	Cerveja = 0	Cerveja = 1	Sum
Fralda = 0	132.396	52.604	185
Fralda = 1	91.604	36.396	128
Sum	224.000	89.000	313

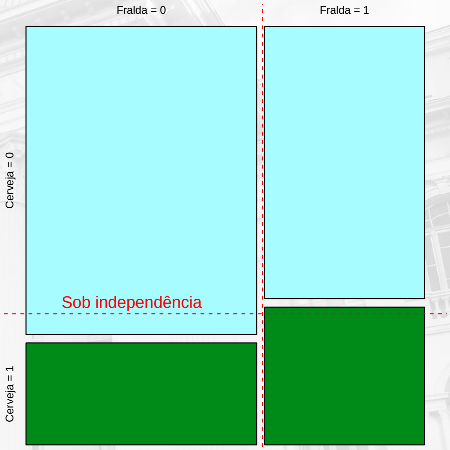

Figura 10. Gráfico de mosaico para a compra de fraldas e cerveja.

Teste de independência para tabela de contingência

- Sejam as **hipóteses** nula e alternativa

$$H_0 : \text{as duas variáveis são independentes.}$$
$$H_a : \text{as duas variáveis não são independentes.}$$

- A **estatística de teste** é

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}},$$

em que $E_{ij} = \frac{R_i C_j}{n}$ é a **frequência esperada** da célula ij, assumindo que a hipótese nula de independência é verdadeira. R_i e C_j são os totais de linha e coluna e n é o tamanho da amostra.

- Rejeita-se a hipótese nula H_0 ao nível de significância α se

$$\chi^2 > \chi^2_\alpha,$$

em que χ^2_α é o **quantil superior** da distribuição qui-quadrado com $(r-1)(c-1)$ graus de liberdade.

Aplicação

- Para os dados de fralda e cerveja, tem-se a estatística de teste determinada por

$$
\begin{aligned}
\chi^2 &= \frac{(139 - 132.396)^2}{132.396} + \frac{(85 - 91.604)^2}{91.604} \\
&+ \frac{(46 - 52.604)^2}{52.604} + \frac{(43 - 36.396)^2}{36.396} \\
&= 2.833.
\end{aligned}
$$

- Para o nível de significância $\alpha = 0.05$ e $(2-1)(2-1) = 1$ graus de liberdade o quantil da qui-quadrado é $\chi^2_{0.05} = 3.841$.
- Portanto, **não rejeita-se** a hipótese nula de independência entre as variáveis.

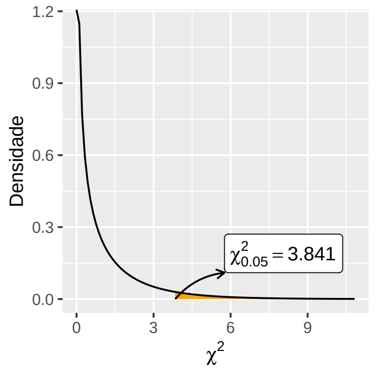

Figura 11. Quantil da distribuição qui-quadrado.

Exercício: métodos de estudo e desempenho

Deseja-se determinar se o método de aprendizado remoto tem relação com a aprovação dos alunos nas disciplinas. Os alunos foram classificados conforme o método predominante de estudo (Y_1): apenas por vídeos, apenas por listas de exercícios ou ambos. Concomitante a isso, tem-se a aprovação dos alunos na disciplina (Y_2). Aplique o teste com $\alpha = 0.05$.

Tabela 3. Alunos conforme método predominante de estudo e aprovação.

	Vídeos	Listas	Ambos	Sum
Reprovado	40	12	8	60
Aprovado	80	48	82	210
Sum	120	60	90	270

Figura 12. Foto de Julia M Cameron no Pexels.

Análise exploratória

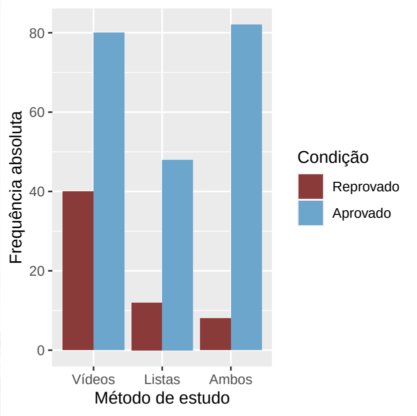

Figura 13. Aprovação dos alunos conforme método de estudo.

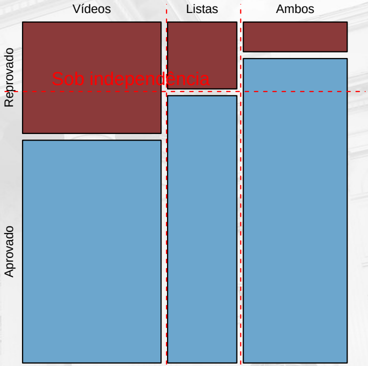

Figura 14. Relação entre aprovação dos alunos é método de estudo.

Solução

- Para os dados em questão, tem-se a estatística de teste determinada por

$$\chi^2 = \frac{(40-26.67)^2}{26.67} + \frac{(80-93.33)^2}{93.33} + \cdots + \frac{(8-20)^2}{20} + \frac{(82-70)^2}{70} = 18.$$

- Para o nível de significância $\alpha = 0.05$ e $(2-1)(3-1) = 2$ graus de liberdade, o quantil da qui-quadrado é $\chi^2_{0.05} = 5.991$.
- Portanto, **rejeita-se** a hipótese nula de independência entre as variáveis.

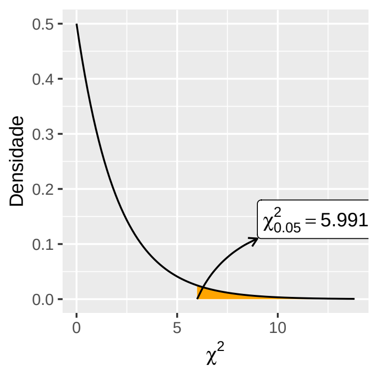

Figura 15. Quantil da distribuição qui-quadrado.

Condições requeridas para um teste χ^2 válido

1. Os dados devem vir de **experimentos multinomiais**. Isso geralmente é satisfeito quando tem-se uma amostra aleatória da população.
2. Em cada variável, os resultados devem ser **mutuamente exclusivos**.
3. O tamanho da **amostra** n é **grande**. Isso é satisfeito se cada frequência esperada, E_{ij}, for igual ou maior que 5.
4. $E_{ij} \geq 5$ é necessário para que a aproximação da **distribuição amostral** da estatística do teste usando a qui-quadrado seja boa.
5. Existem outros métodos mas que estão fora do escopo deste material.

Considerações finais

Considerações finais

Revisão

- Experimentos multinomiais.
- Teste χ^2 para aderência.
- Teste χ^2 para associação.

Testes χ^2

- A aproximação da distribuição χ^2 é **ruim** quando n não é grande.
- Na prática, considera-se que os valores esperados sejam ≥ 5 para uma aproximação **satisfatória**.
- Ao rejeitar a hipótese nula de independência, cuidar para não fazer **afirmações causais**.
- Os testes não são capazes de **revelar existência de relação de causalidade**.
- Para isso existem os **experimentos planejados**.