CE 002 - Estatística I

Agronomia - Turma B

Professor Walmes Marques Zeviani

Laboratório de Estatística e Geoinformação
Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

1º semestre de 2012

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Sumário

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Regra da multiplicação

A regra da multiplicação é uma expressão derivada do conceito de probabilidade condicional. Uma vez que

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{1}$$

temos que

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A). \tag{2}$$

Com isso podemos obter a probabilidade de uma intersecção pelo produto de uma probabilidade marginal com uma probabilidade condicional. Isso é o que fazemos nos ultimos ramos do diagrama de árvore de probabilidade.

Regra da multiplicação

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B). \tag{3}$$

Regra da multiplicação

A regra da multiplicação é uma expressão derivada do conceito de probabilidade condicional. Uma vez que

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{4}$$

temos que

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A). \tag{5}$$

Com isso podemos obter a probabilidade de uma intersecção pelo produto de uma probabilidade marginal com uma probabilidade condicional. Isso é o que fazemos nos ultimos ramos do diagrama de árvore de probabilidade.

Regra da multiplicação

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B). \tag{6}$$

Exemplo

Estágios de produção

A primeira estapa de um processo de produção gera peças dentro das especificações com probabilidade 0.9. Essas peças são submetidas a segunda etapa segunda etapa de produção onde uma peça atende as especificações com probabilidade 0.95. Qual a probabilidade de ambos estágios atenderem as especificações?

Sejam A e B os eventos em que em ambos os estágio atendam às especificações. A probabilidade requerida é

$$P(A \cup B) = P(B|A) \cdot P(A) = 0.95 \cdot 0.90 = 0.855. \tag{7}$$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Regra da probabilidade total (2 eventos)

Para quaisquer eventos A e B nós temos que

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c). \tag{8}$$

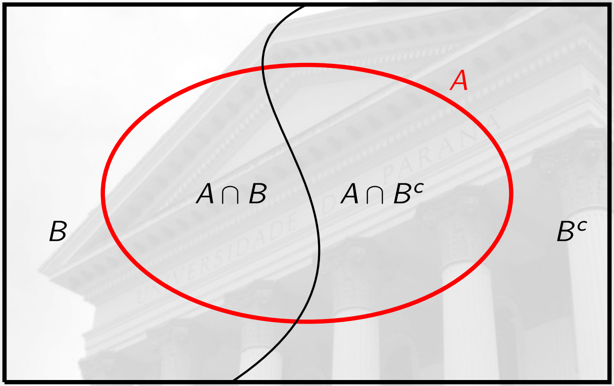
Como B e B^c são disjuntos por definição, ou seja, $B \cap B^c = \{\varnothing\}$, temos que

$$P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c). \tag{9}$$

Vimos anteriormente que as intersecções podem ser escritas em termos de probabilidades condicionais, assim

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c) \tag{10}$$

Regra da probabilidade total



Regra da probabilidade total (múltiplos eventos)

Sendo os eventos B_1, B_2, B_3, ..., B_n, mutuamente exlusivos 2 a 2, temos

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n). \tag{11}$$

Escrevendo como probabilidade condicional, temos

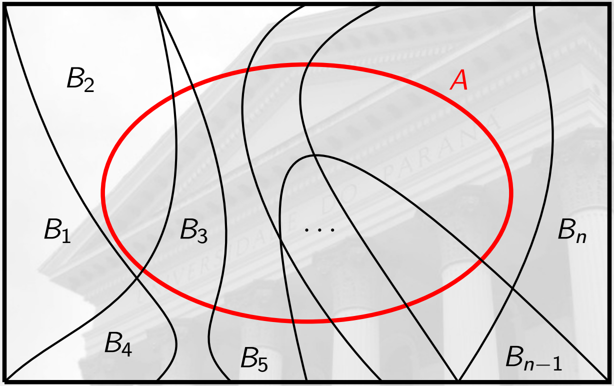
$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n). \tag{12}$$

Usando o operador somatório, temos

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i). \tag{13}$$

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Regra da probabilidade total (múltiplos eventos)



Exemplo

Contaminação de semicondutores

Um *chip* falha com probabilidade de 0.10 se sujeito à alta contaminação. A falha ocorre com probabilidade de 0.005 se não sujeito a alta contaminação. O risco de um *chip* passar por alta contaminação é 0.20. Qual a probabilidade de um produto que usa um desses *chips* falhar?

Seja F o evento "o *chip* falhar" e H "ocorrer alta contaminação". Temos

$$P(F|H) = 0.10 \qquad P(F|H^c) = 0.005 \qquad P(H) = 0.2 \qquad P(H^c) = 0.8 \tag{14}$$

Assim, da equação para a probabilidade total, temos que

$$P(F) = P(F|H)P(H) + P(F|H^c)P(H^c) = 0.10 \cdot 0.20 + 0.005 \cdot 0.8 = 0.024. \tag{15}$$

que pode ser interpretada precisamente como a média ponderada das duas probabilidades de falha.

Independência

Definição

Os eventos A e B são **eventos independentes** se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja, eventos A e B são independentes se

$$P(B|A) = P(B) \text{ e também que } P(A|B) = P(A). \tag{16}$$

Com isso e a regra da probabilidade total temos que

$$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A) = P(B) \cdot P(A). \tag{17}$$

Isso significa que se dois eventos são idependentes, a probabilidade da ocorrência simultânea $P(B \cap A)$ é o produto das probabilidades marginais, $P(A)$ e $P(B)$.

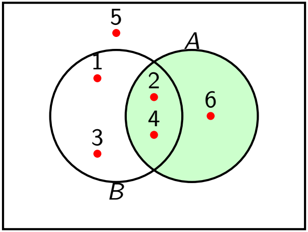
Exemplo

Lançamento de um dado

Considere o lançamento de um dado justo e os seguintes eventos

$$A = \text{“resultado é um número par”}$$
$$B = \text{“resultado é um número menor ou igual a 4”}$$

Os eventos A e B são independentes?



Temos que $P(A) = 1/2$, $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{2/6}{4/6} = 1/2$. Da mesma forma, $P(B) = 2/3$, $P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) = \frac{2/6}{3/6} = 2/3$. Portando, os eventos A e B são independentes. Saber que A ocorreu não muda a probabilidade de B ocorrer e vice-versa.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Independência de múltiplos eventos

Se existem k eventos independentes, a intersecção desses eventos é dado por

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k) = \prod_{i=1}^{k} P(A_i). \quad (18)$$

Circuito em série

O circuito abaixo só funciona se houver um caminho de dispositivos em funcionamento. A probabilidade de cada dispositivo é mostrada no diagrama. Suponha que os dispositivos falhem de forma independente. Qual a probabilidade do circuito funcionar?

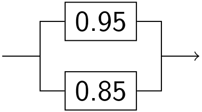
$$-\boxed{0.95}-\boxed{0.85}\rightarrow$$

$A =$ "dispositivo da esquerda funciona",
$B =$ "dispositivo da direita funciona".

$$P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.95 \cdot 0.85 = 0.8075. \qquad (19)$$

Circuito em paralelo

O circuito abaixo só funciona se houver um caminho de dispositivos em funcionamento. A probabilidade de cada dispositivo é mostrada no diagrama. Suponha que os dispositivos falhem de forma independente. Qual a probabilidade do circuito funcionar?



$A =$ "dispositivo de cima funciona", $B =$ "dispositivo de baixo funciona".

$$\begin{aligned}
P(A \text{ ou } B) &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) && (20)\\
&= 0.95 + 0.85 - 0.95 \cdot 0.85 = 0.9925, \text{ou ainda} && (21)\\
P(A \cup B) &= 1 - P(A^c \cap B^c) && (22)\\
&= 1 - [(1 - 0.95) \cdot (1 - 0.85)] = 0.9925. && (23)
\end{aligned}$$

Teorema de Bayes

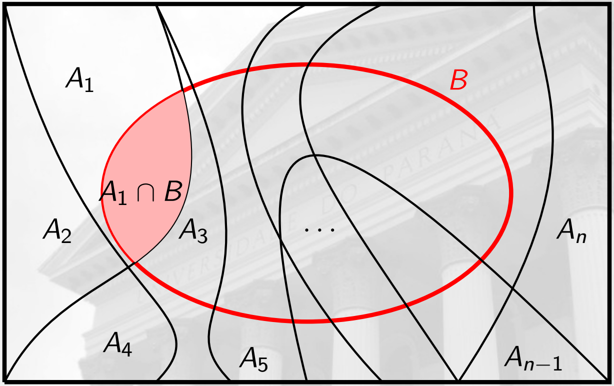
Se A_1, A_2, A_3, . . . , A_n forem eventos mutuamente excludentes e exaustivos e B for qualquer evento, então

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i|B) \cdot P(A_i)}, \tag{24}$$

sendo que o mesmo vale para A_2, A_3, etc.

Rev. T. Bayes

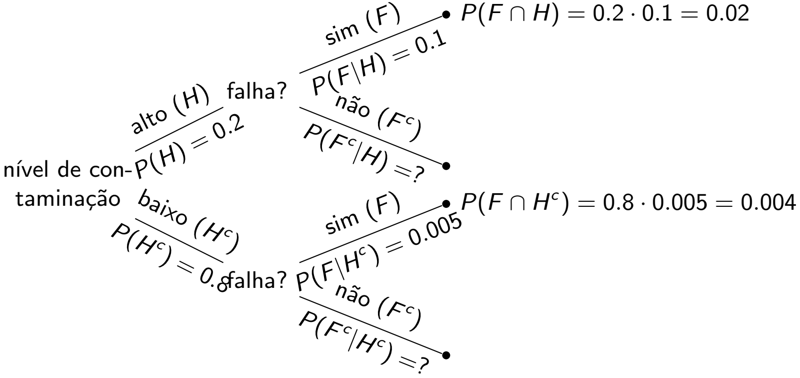
Teorema de Bayes

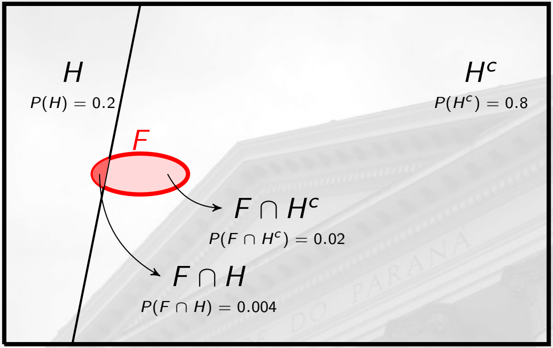


Exemplo

Exemplo 1 - Semicondutores

Dado que um semicondutor falhou, qual a probabilidade de ter passado por alta contaminação durante a produção? Informações são dadas na árvore de probabilidades abaixo.





$$P(F) = P(F \cap H) + P(F \cap H^c) = 0.02 + 0.004, \text{pela regra da prob. total} \tag{25}$$

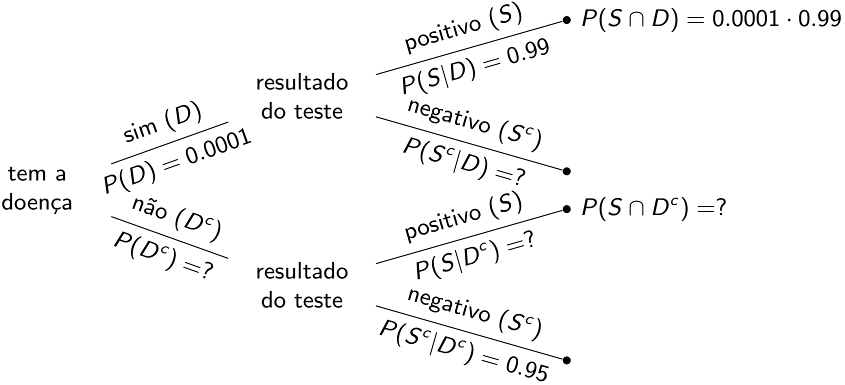
E assim

$$P(H|F) = \frac{P(F \cap H)}{P(F)} = \frac{0.02}{0.02 + 0.004} = \frac{0.02}{0.024} = 0.833\bar{3}. \tag{26}$$

Exemplo

Exemplo 2 - Diagnóstico médico

A probabilidade do teste identificar corretamente alguém com a doença, dando positivo, é de 0.99. De identificar alguém sem a doença é de 0.95. A incidência da doença na população é de 0.0001. Se você fez o teste e deu positivo, qual a probabilidade de você ter a doença?



Usando propriedades de eventos disjuntos e complementares obtemos as probabilidades que faltam no diagrama de árvore de probabilidades. Assim, podemos obter o que se pede

$$P(D|S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{P(D \cap S)}{P(D \cap S) + P(D^c \cap S)} \quad (27)$$

$$= \frac{0.0001 \cdot 0.99}{0.0001 \cdot 0.99 + 0.9999 \cdot 0.05} = \frac{9.9 \cdot 10^{-5}}{0.050094} = 0.001976. \quad (28)$$

Com isso entendemos que, apesar do teste ter alta capacidade de identificar a doença, quando positivo a sua probabilidade de estar doente (quase 0.2%) ainda é muito baixa devido a baixíssima incidência da doença na população (0.01%).