CE 083 - Estatística Computacional I - Estatística (2013/2) www.leg.ufpr.br/ce083
Prof. Walmes M. Zeviani - Departamento de Estatística - UFPR
Lista de exercícios sobre probabilidade
Acadêmico: grr:

---

1. (probdist1 - MontPg47exm3-9) Um bit ao ser transmitido por um canal digital pode ser recebido com erro. Seja X o número de bits recebidos com erro nas próximas 4 transmissões. Se algumas suposições forem satisfeitas, a distribuição de probabilidades para X pode ser dada por um modelo matemático. Por enquanto, suponha que as probabilidades sejam:

```
x <- 0:4
px <- c(6561,2916,486,36,1)/10000
cbind(x, px)
##      x     px
## [1,] 0 0.6561
## [2,] 1 0.2916
## [3,] 2 0.0486
## [4,] 3 0.0036
## [5,] 4 0.0001
```

a) Verifique se `px` é uma distribuição de probabilidades;
b) Faça o gráfico da distribuição de probabilidades de X;
c) Faça o gráfico de distribuição de probabilidades acumulada de X;
d) Calcule o valor esperado de X e represente nos gráficos;
e) Calcule a variância de X;
f) Calcule $\Pr(X \leq 2)$;
g) Calcule $\Pr(1 < X \leq 3)$;

---

2. (probdist2 - MontPg47exm3-11) O número de mensagens enviadas por hora, através de uma rede de computadores, tem a seguinte distribuição:

```
x <- 10:15
px <- c(8,15,30,20,20,7)/100
rbind(x, px)
##     [,1]  [,2] [,3] [,4] [,5]  [,6]
## x  10.00 11.00 12.0 13.0 14.0 15.00
## px  0.08  0.15  0.3  0.2  0.2  0.07
```

a) Calcule o valor esperado de X;
b) Calcule o desvio-padrão de X;
c) Faça o gráfico da distribuição de probabilidades de X;
d) Faça o gráfico de distribuição de probabilidades acumulada de X;

---

3. (probdist3 - MontPg47exm3-12) Considere o exercício 1. Suponha que $Y = X^2$, ou seja Y é uma função de X.

```
x <- 0:4
px <- c(6561,2916,486,36,1)/10000
y <- x^2
cbind(x, y, px)
##      x  y     px
## [1,] 0  0 0.6561
## [2,] 1  1 0.2916
## [3,] 2  4 0.0486
## [4,] 3  9 0.0036
## [5,] 4 16 0.0001
```

a) Calcule o valor esperado de Y;
b) Calcule o desvio-padrão de Y;
c) Pelos resultados $\mathrm{E}(X)^2$ é igual à $\mathrm{E}(X^2)$?

---

4. (probdist4) Considere o conjunto de dados `iris`. Seja X o comprimento da sepala (`Sepal.Length`) e Y o comprimento da pétala (`Petal.Length`) de um registro ao acaso. Sejam

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 6 \\ 1 & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

$$W = \begin{cases} -1 & \text{se } y \leq 3 \\ 1 & \text{se } y > 3 \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1.5y \\ 2 & \text{se } x > 1.5y \end{cases}$$

```
str(iris)
## 'data.frame': 150 obs. of  5 variables:
##  $ Sepal.Length: num  5.1 4.9 4.7 4.6 5 5.4 4.6 5 4.4 4.9 ...
##  $ Sepal.Width : num  3.5 3 3.2 3.1 3.6 3.9 3.4 3.4 2.9 3.1 ...
##  $ Petal.Length: num  1.4 1.4 1.3 1.5 1.4 1.7 1.4 1.5 1.4 1.5 ...
##  $ Petal.Width : num  0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.4 0.3 0.2 0.2 0.1 ...
##  $ Species     : Factor w/ 3 levels "setosa","versicolor",..: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
```

a) Obtenha a distribuição de probabilidade de Z, W e K;
b) Obetnha o valor de esperado de de Z, W e K.

---

5. (probdist5) Considere o conjunto de dados `iris`. Seja X a variável com valores no conjunto $\{1, 2, \ldots, 4\}$ caso o comprimento da sépala (`Sepal.Length`) esteja em uma das classes $[4; 5], \ldots, (7; 8]$. Seja Y a variável com valores no conjunto $\{1, 2, 3\}$ caso o comprimento da pétala (`Petal.Length`) esteja em uma das classes $[1; 3], \ldots, (5; 7]$.

```
str(iris)
## 'data.frame': 150 obs. of  5 variables:
##  $ Sepal.Length: num  5.1 4.9 4.7 4.6 5 5.4 4.6 5 4.4 4.9 ...
##  $ Sepal.Width : num  3.5 3 3.2 3.1 3.6 3.9 3.4 3.4 2.9 3.1 ...
##  $ Petal.Length: num  1.4 1.4 1.3 1.5 1.4 1.7 1.4 1.5 1.4 1.5 ...
##  $ Petal.Width : num  0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.4 0.3 0.2 0.2 0.1 ...
##  $ Species     : Factor w/ 3 levels "setosa","versicolor",..: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
```

a) Obtenha a distribuição de probabilidade de X e seu valor esperado;
b) Obtenha a distribuição de probabilidade de Y e seu valor esperado;
c) Obtenha a dsitribuição de probabilidades conjunta de X e Y;

---

6. (binomial1) Seja o experimento aleatório consiste de fazer n ensaios (de Bernoulli) de modo que 1) os ensaios sejam independentes, 2) que o resultado seja dicotômico (sucesso e fracasso) e 3) que a probabilidade de sucesso p seja constante. A variável aleatória X, que o número de ensaios com resultado do tipo sucesso, tem distribuição binomial com parâmetros $0 < p < 1$ e $n \in \mathbb{N}^*$. A função de probabilidade de X é

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

Escreva uma função para calcular $p(x)$. Ao implementar, inclua proteções, com mensagens de erro, contra valores fora do espaço paramétrico (p e n) ou suporte (x).

---

7. (binomial2) Considere as funções `dbinom()` e `pbinom()`. Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros n e p.
a) Obtenha $\Pr(X \leq 5)$ se $n = 10$ e $p = 1/3$;
b) Obtenha $\Pr(X > 7)$ se $n = 15$ e $p = 2/3$;
c) Obtenha $\Pr(X = 8)$ se $n = 10$ e $p = 0.5$;
d) Obtenha $\Pr(3 < X \leq 9)$ se $n = 12$ e $p = 3/4$;

---

8. (binomial3) A definição geral de função quantil, que variáveis aleatórias contínuas é a função inversa da função de distribuição acumulada, é a seguinte

$$F^{-1}(q) = \min\{x : F(x) \geq q\}, \quad 0 < q < 1. \tag{2}$$

Seja $X \sim \text{Binomial}(n = 10, p = 0.45)$. Escreva uma função para obter os quantis de X conforme definição dada, ou seja, uma função que para um valor fornecido q retorne $F^{-1}(q)$. Os vetores `x` e `Px` definidos a seguir devem ser fornecidos e usados na função.

```
x <- 0:10
Px <- pbinom(x, 10, 0.45)
cbind(x, Px)
##        x       Px
##  [1,]  0 0.002533
##  [2,]  1 0.023257
##  [3,]  2 0.099560
##  [4,]  3 0.266038
##  [5,]  4 0.504405
##  [6,]  5 0.738437
##  [7,]  6 0.898005
##  [8,]  7 0.972608
##  [9,]  8 0.995498
## [10,]  9 0.999659
## [11,] 10 1.000000
```

---

9. (negbinomial1) Em uma série de ensaios de Bernoulli (independentes e com probabilidade p constante), seja a variável aleatória X o número de tentativas até que r sucessos ocorram. Então X é uma variável aleatória binomial negativa com parâmetros $0 < p < 1$ e $r = 1, 2, \ldots$, e sua função de probabilidade é

$$p(x) = \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} \, p^r, \quad x = r, r+1, \ldots. \tag{3}$$

Escreva uma função para calcular $p(x)$. Ao implementar, inclua proteções, com mensagens de erro, contra valores fora do espaço paramétrico (p e r) ou suporte (x).

---

10. (poisson1) Se X é uma variável aleatória com distribuição Poisson com parâmetro λ sua função de probabilidade é

$$p(x) = \frac{\exp\{-\lambda\} \, \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

Escreva uma função para calcular $p(x)$. Ao implementar, inclua proteções, com mensagens de erro, contra valores fora do espaço paramétrico (λ) ou suporte (x).

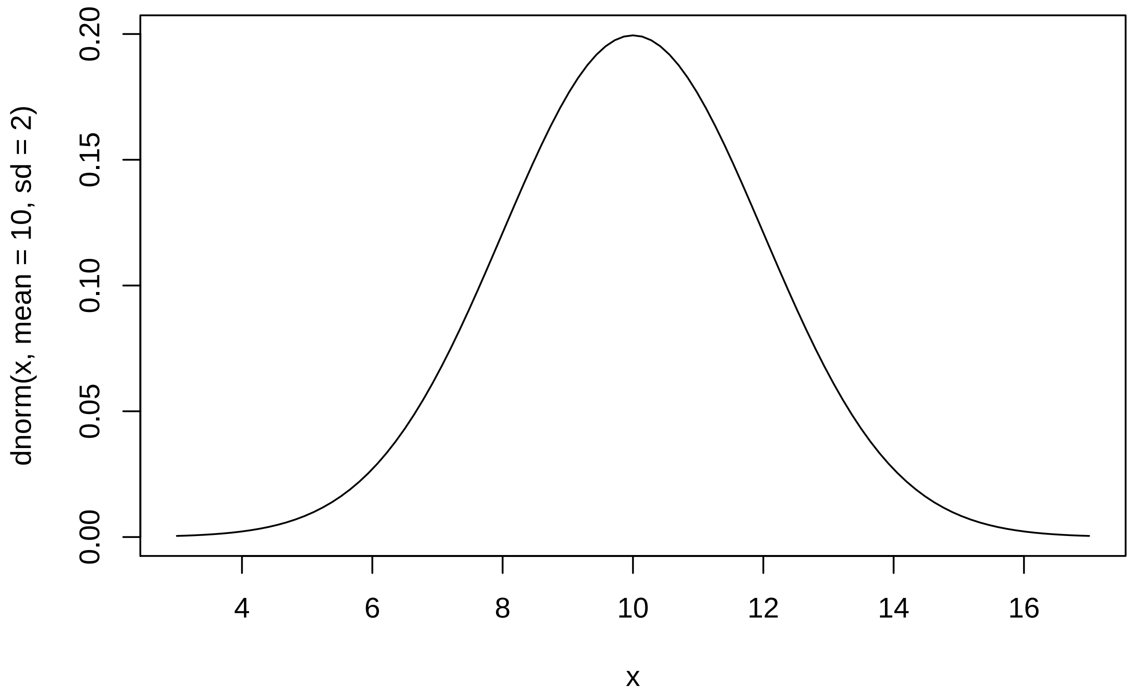
---

11. (poisson2) Seja X é uma variável aleatória com distribuição Poisson com parâmetro λ. Considere as funções `dpois()` e `ppois()`.
a) Obtenha $\Pr(X \leq 5)$ se $\lambda = 11$;
b) Obtenha $\Pr(X > 12)$ se $\lambda = 9$;
c) Obtenha $\Pr(3 < X \leq 8)$ se $\lambda = 9$;
d) Obtenha $\Pr(X \leq 10 \text{e par})$ se $\lambda = 8$;

---

12. (fundens1) As funções de densidade de probabilidade das distribuições normal, beta, exponencial, gama e Weibull são dadas pelas funções em R `dnorm()`, `dbeta()`, `dexp()`, `dgamma()`, e `dweibull()`.
a) Faça gráficos dessas distribuições partindo do exemplo fornecido;
b) Escreva a expressão matématica de cada uma dessas distribuições.

```
curve(dnorm(x, mean=10, sd=2), from=3, to=17)
```



---

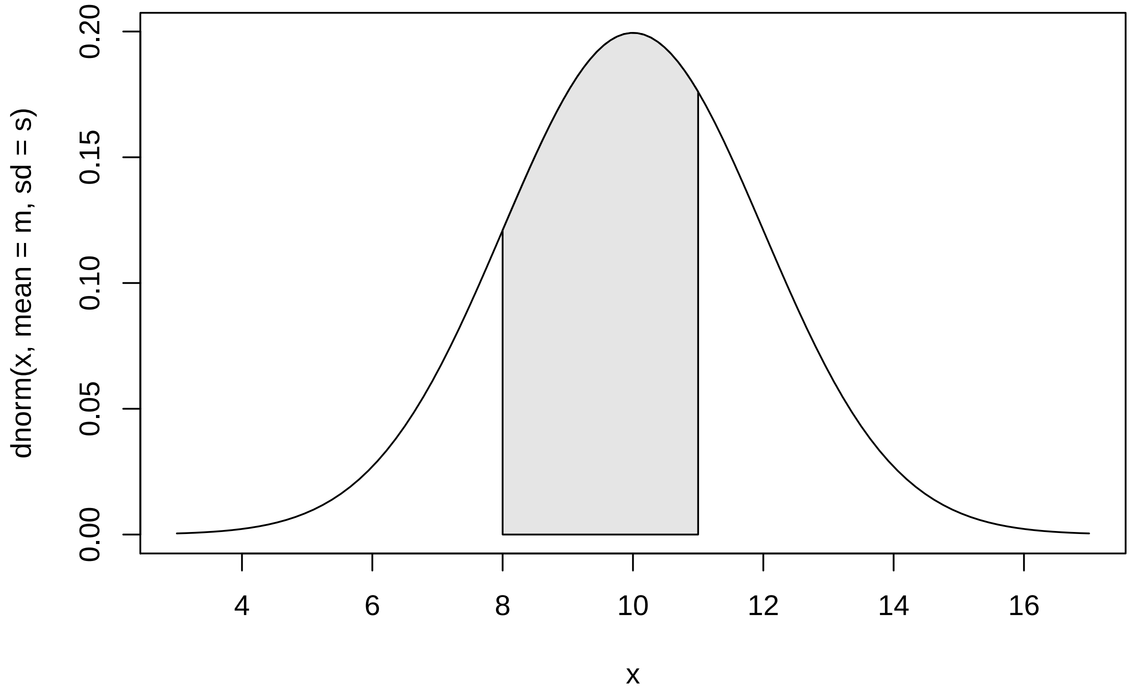
13. (fundens2) Considere a distribuições de probabilidade contínuas e suas correspondentes funções em R. Obtenha a probabilidade dos eventos a seguir e faça gráficos destacando as regiões correspondentes conforme o exemplo abaixo.

$$\Pr(8 < X \leq 11), \quad X \sim \text{Normal}(\mu = 10, \sigma^2 = 4).$$

```
## cálculo da probabilidade
m <- 10; s <- sqrt(4)
x1 <- 8; x2 <- 11
diff(pnorm(c(x1,x2), m=m, s=s))
## [1] 0.5328

## cria vetor de x e f(x)
x <- seq(x1, x2, length.out=30)
fx <- dnorm(x, m=m, s=s)

# faz o gráfico e destaca região
curve(dnorm(x, mean=m, sd=s), from=3, to=17)
polygon(x=c(x1,x,x2), y=c(0,fx,0), col="gray90")
```



a) $\Pr(0.4 < X \leq 0.7), \quad X \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 2)$.
b) $\Pr(1 < X \leq 2), \quad X \sim \text{Exponencial}(\lambda = 1)$.
