Teorema de Bayes

Testes diagnóstico

Paulo Justiniano Ribeiro Jr

Curso de Estatística e Ciência de Dados
Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

2026/2

Exemplo: O problema dos testes diagnóstico

Teste diagnóstico positivo implica doente?

- Será que o teste sempre acerta o diagnóstico?
- Se não, qual a chance de erro?
- Como avaliar um teste? Ou comparar?
- Se o teste resultar positivo, será que a pessoa certamente está doente?
- Se o teste resultar negativo, será que a pessoa certamente não está doente?

Exemplo: O problema dos testes diagnóstico

DEST Departamento de Estatística

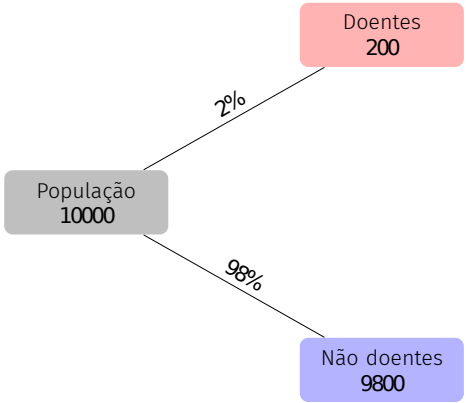
Informação disponível:

- Teste de varredura/triagem (*screening*) para uma determinada doença.
- O teste pode ser *imperfeito*, suponha que:
  acerta 90% dos que tem doença e 80% dos que não tem.
- A doença ocorre em 2% da população.

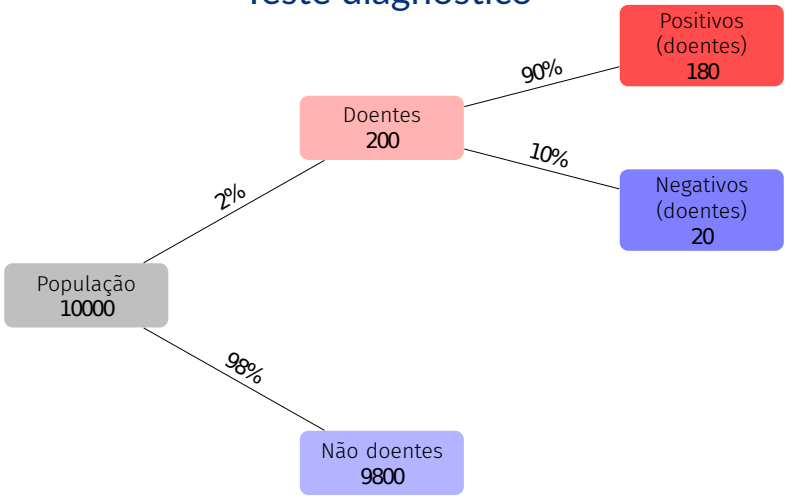
Perguntas de interesse:

- Se uma pessoa testou positivo, qual a chance de ter a doença?
- Se testou negativo, qual a chance de estar livre da doença?

Teste diagnóstico

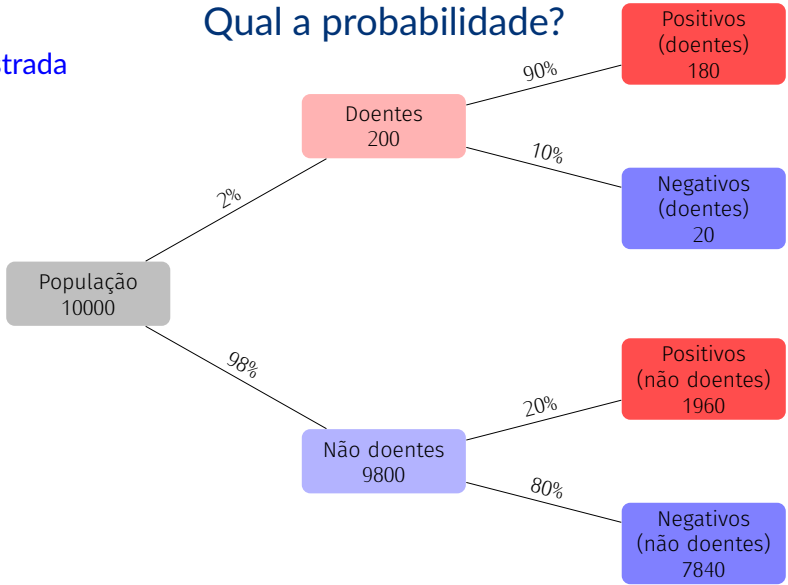


Teste diagnóstico



Qual a probabilidade?

Solução ilustrada



Qual a probabilidade?

DEST Departamento de Estatística

Terminologia específica.

- Teste de *screening* para uma determinada doença.
- Teste *imperfeito*:
  acerta 90% dos que tem doença (***sensibilidade***) e portanto 10% de ***falso negativo***,
  acerta 80% dos que não tem (***especificidade***) e portanto 20% de ***falso positivo***.
- A doença ocorre em 2% da população (***prevalência***).

Perguntas de interesse:

- Se uma pessoa testou positivo, qual a chance de ter a doença?
  (***valor preditivo positivo***)
- Se testou negativo, qual a chance de estar livre da doença?
  (***valor preditivo negativo***)

Testes diagnóstico - Organizando dados em tabelas

Características do teste (para diagnósticos conhecidos)

	Positivo	Negativo	
c/ Doença	0,90	0,10	1
s/ Doença	0,20	0,80	1

Temos 2% com a doença na população (e portanto 98% sem)

	Positivo	Negativo	Total
c/ Doença	0,018	0,002	0,02
s/ Doença	0,196	0,784	0,98
Total	0,214	0,786	1

Conhecendo o resultado do teste

	Positivo	Negativo	
c/ Doença	0,0841	0,00254	
s/ Doença	0,916	0,997	
Total	1	1	

Testes diagnóstico

A notação é nossa amiga!

$$
\begin{aligned}
P[+|D] = 0,90 &\longrightarrow P[-|D] = 0,10 \\
P[-|\overline{D}] = 0,80 &\longrightarrow P[+|\overline{D}] = 0,20 \\
P[D] = 0,02 &\longrightarrow P[\overline{D}] = 0,98 \\
P[D|+] = ? \qquad & \qquad P[\overline{D}|-] = ?
\end{aligned}
$$

E um Teorema resolve o problema!

$$
\begin{aligned}
P[D|+] &= \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}]} \\
&= \frac{0,90 \cdot 0,02}{0,90 \cdot 0,02 + 0,20 \cdot 0,98} = 0,0841
\end{aligned}
$$

Testes diagnóstico

Solução ilustrada (com notação)

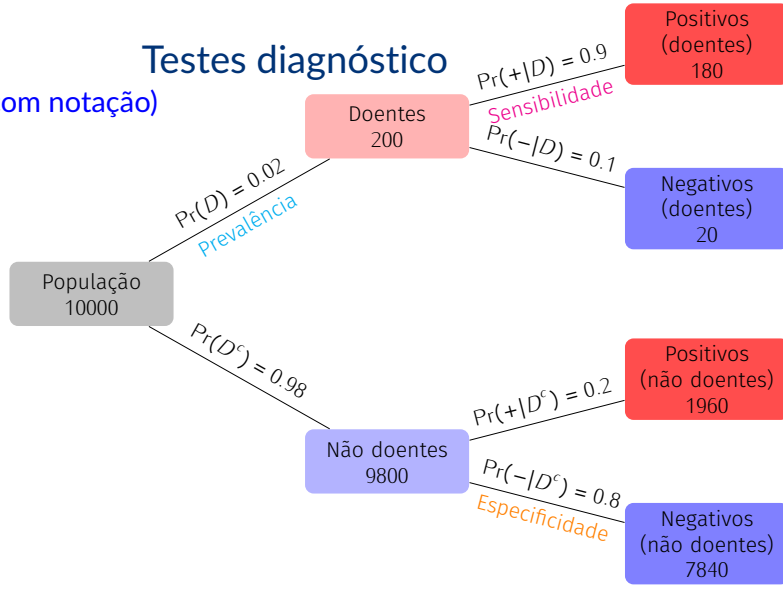


Figura 1. Ilustração do problema do teste diagnóstico.

Terminologia no contexto

$$P[+|D] = 0,90 \text{ (sens)} \longrightarrow P[-|D] = 0,10 \text{ (1 - sens)}$$
$$P[-|\overline{D}] = 0,80 \text{ (esp)} \longrightarrow P[+|\overline{D}] = 0,20 \text{ (1 - esp)}$$
$$P[D] = 0,02 \text{ (prev)} \longrightarrow P[\overline{D}] = 0,98 \text{ (1 - prev)}$$
$$P[D|+] = ? \text{ (vpp)} \qquad P[\overline{D}|-] = ? \text{ (vpn)}$$

Teste +

$$\begin{aligned} \text{vpp} &= \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}]} \\ &= \frac{\text{sens} \cdot \text{prev}}{\text{sens} \cdot \text{prev} + (1 - \text{esp}) \cdot (1 - \text{prev})} \\ &= \frac{0,90 \cdot 0,02}{0,90 \cdot 0,02 + 0,20 \cdot 0,98} = 0,0841 \end{aligned}$$

Teste -

$$\begin{aligned} \text{vpn} &= \frac{P[-|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}]}{P[-|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}] + P[-|D] \cdot P[D]} \\ &= \frac{\text{esp} \cdot (1 - \text{prev})}{\text{esp} \cdot (1 - \text{prev}) + (1 - \text{sens}) \cdot \text{prev}} \\ &= \frac{0,80 \cdot 0,98}{0,80 \cdot 0,98 + 0,10 \cdot 0,02} = 0,997 \end{aligned}$$

Algo estranho … ou não?

O resultado surpreende?

- A probabilidade $P[D|+] = 0,0841$ é baixa,
- mas …, após o resultado do teste, a chance de ter a doença aumentou (mais que) quatro vezes indo de $P[D] = 0,02$ para $P[D|+] = 0,0841$.
- Já a probabilidade $P[\overline{D}|-] = 0,997$ é bastante elevada.

Ou seja,

- O teste positivo não implica na presença da doença,
- mas o teste negativo, quase certamente, descarta a doença.

O problema dos testes diagnóstico

E se o teste tivesse sido feito por recomendação médica após um exame? Mudaria algo?
Baseado em sua experiência o médico estima que 30% dos pacientes com os sintomas apresentados possuem a doença.
Solução?

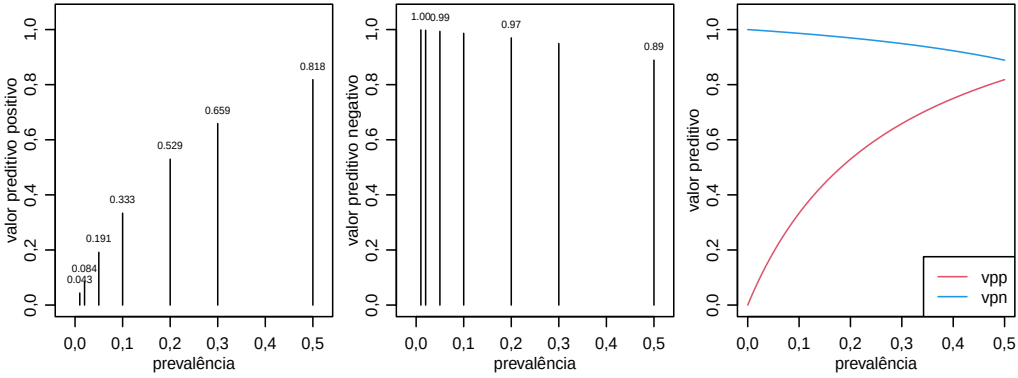
Neste caso $P[D] = 0,30$ e refazendo os mesmos cálculos:

$$\begin{aligned} P[D|+] &= \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}]} \\ &= \frac{0,90 \cdot 0,30}{0,90 \cdot 0,30 + 0,20 \cdot 0,70} = 0,659 \end{aligned}$$

Comparação e *interpretação* (e ...muito cuidado!)

O problema dos testes diagnóstico

Valor preditivo positivo (vpp) e negativo (vpn) para diferentes prevalências.
Resultados para sensibilidade = 0,90 e especificidade = 0,80.



Um outro olhar sobre o problema

- Existência de uma probabilidade inicial (*a priori*).

Estado	Sadio ($\overline{D}$)	Doente (D)
Probabilidade	0,98	0,02

- Informação
  Teste positivo: $P[+|D] = 0,90$ e $P[+|\overline{D}] = 0,20$

- (possivelmente) alterando probabilidades (*a posteriori*).

Estado	Sadio ($\overline{D}$)	Doente (D)
Probabilidade	0,916	0,084

- Classificação de possíveis *estados da natureza* e suas probabilidades.

- Decisão guiada pela probabilidade.

Teorema de Bayes: notação “usual”

$$P[D|+] = \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}]}$$
$$\propto P[+|D] \cdot P[D]$$

$D : A_1, \overline{D} : A_2$ e $+ : B, - : \overline{B}$

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]}$$
$$\propto P[B|A_j] \cdot P[A_j]$$

Teorema de Bayes

Reescrevendo e reinterpretando como problema de classificação.

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]} \propto P[B|A_j] \cdot P[A_j]$$

Como o paciente deve ser classificado após o teste?

$$P[A_1|B] \propto P[B|A_1] \cdot P[A_1] \text{ (ou, } P[D|+] \propto P[+|D] \cdot P[D])$$
$$P[A_2|B] \propto P[B|A_2] \cdot P[A_2] \text{ (ou, } P[\overline{D}|+] \propto P[+|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}])$$

Portanto,

$$P[A_1|B] \propto 0,90 \cdot 0,02 = 0,018$$
$$P[A_2|B] \propto 0,20 \cdot 0,98 = 0,196$$

A_1 e A_2 são todas as categorias possíveis, as probabilidades devem somar 1:

$$P[A_1|B] = \frac{0,018}{0,018 + 0,196} = 0,084$$
$$P[A_2|B] = \frac{0,196}{0,018 + 0,196} = 0,916$$

Teorema de Bayes

Qual a população?

- teste de varredura (*screening*) $P(A_1) = 0,02$
- teste por indicação (*auxílio a diagnóstico*) $P(A_1) \gg 0,02$

Consulta levanta suspeita e pede-se o teste.
Opinião especializada após consulta $P(A_1) = 0,50$

$$P[A_1|B] \propto 0,9 \cdot 0,5 = 0,45$$
$$P[A_2|B] \propto 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$$

Padronizando para somar 1:

$$P[A_1|B] = \frac{0{,}45}{0{,}45 + 0{,}1} = 0,818$$
$$P[A_2|B] = \frac{0{,}1}{0{,}45 + 0{,}1} = 0,182$$

Testes em série

E se o (mesmo) teste for repetido?
Notação: $B_{(1)}$ positivo no primeiro e $B_{(2)}$ positivo no segundo.
Supondo independência:

$$P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto P[B_{(2)}|A_1] \cdot P[B_{(1)}|A_1] \cdot P[A_1],$$
$$P[A_2|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto P[B_{(2)}|A_2] \cdot P[B_{(1)}|A_2] \cdot P[A_2].$$

Portanto, se for o mesmo teste (mesmas características de sensibilidade e especificidade):

$$P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto 0,90^2 \cdot 0,02 = 0,0162,$$
$$P[A_2|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto 0,20^2 \cdot 0,98 = 0,0392.$$

Logo,

$$P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}] = \frac{0,0162}{0,0162 + 0,0392} = 0{,}292 \quad P[A_2|B_{(1)}, B_{(2)}] = \frac{0,0392}{0,0162 + 0,0392} = 0{,}708.$$

A classificação ainda é a mesma mas as chances mudaram!

Com três testes positivos $P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}, B_{(3)}] = 0,65$.

Testes em série

Testes positivos e negativos?
Notação: $B_{(1)}$ positivo no primeiro, $B_{(2)}$ negativo no segundo e $B_{(3)}$ positivo no terceiro.
Supondo independência:

$$P[A_1|B_{(1)}, \overline{B}_2, B_{(3)}] \propto P[B_{(3)}|A_1] \cdot P[\overline{B}_2|A_1] \cdot P[B_{(1)}|A_1] \cdot P[A_1]$$
$$P[A_2|B_{(1)}, \overline{B}_2, B_{(3)}] \propto P[B_{(3)}|A_2] \cdot P[\overline{B}_2|A_2] \cdot P[B_{(1)}|A_2] \cdot P[A_2]$$

Portanto, se for o mesmo teste (mesmas características de sensibilidade e especificidade):

$$P[A_1|B_{(1)}, \overline{B}_2, B_{(3)}] \propto 0,90 \cdot 0,10 \cdot 0,90 \cdot 0,02 = 0,00162,$$
$$P[A_2|B_{(1)}, \overline{B}_2, B_{(3)}] \propto 0,20 \cdot 0,80 \cdot 0,20 \cdot 0,98 = 0,0314.$$

Logo,

$$P[A_1|B_{(1)}, \overline{B}_2, B_{(3)}] = \frac{0,00162}{0,00162 + 0,0314} = 0,0491 \quad P[A_2|B_{(1)}, \overline{B}_2, B_{(3)}] = \frac{0,0314}{0,00162 + 0,0314} = 0,951.$$

Testes em série

E se forem usados testes diferentes?
Segundo teste: 85% de sensibilidade e 95% de especificidade.
Supondo independência entre os testes.

$$P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto P[B_{(2)}|A_1] \cdot P[B_{(1)}|A_1] \cdot P[A_1]$$
$$P[A_2|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto P[B_{(2)}|A_2] \cdot P[B_{(1)}|A_2] \cdot P[A_2]$$

Portanto, aplicando em série tem-se:

$$P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto 0,85 \cdot 0,90 \cdot 0,02 = 0,0153$$
$$P[A_2|B_{(1)}, B_{(2)}] \propto 0,05 \cdot 0,20 \cdot 0,98 = 0,0098$$

Logo,

$$P[A_1|B_{(1)}, B_{(2)}] = \frac{0,0153}{0,0153 + 0,0098} = 0,6096 \qquad P[A_2|B_{(1)}, B_{(2)}] = \frac{0,0098}{0,0153 + 0,0098} = 0,3904$$

Notação de variável e parâmetro

$$P[D|+] = \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}]}$$
$$\propto P[+|D] \cdot P[D]$$

$D : A_1,\ \overline{D} : A_2$ e $+ : B,\ - : \overline{B}$

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]}$$
$$\propto P[B|A_j] \cdot P[A_j]$$

$D : \theta = 1,\ \overline{D} : \theta = 0$ e $+ : Y = 1,\ - : Y = 0$

$$P[\theta = 1|Y = 1] = \frac{P[Y = 1|\theta = 1] \cdot P[\theta = 1]}{\sum_{j=0}^{1} P[Y = 1|\theta = j] \cdot P[\theta = j]}$$
$$\propto P[Y = 1|\theta = 1] \cdot P[\theta = 1]$$

Adaptando notação

- Existência de uma probabilidade inicial (*a priori*).

Estado	$\theta = 0$ (Não Doente)	$\theta = 1$ (Doente)
Probabilidade	0,98	0,02

- Dado/Informação $Y = 1$ se positivo, $Y = 0$ se negativo,
  Teste positivo e $P[Y = 1|\theta = 1] = 0,90$ e $P[Y = 1|\theta = 0] = 0,20$

- atualizando probabilidades (*a posteriori*).

Estado	$\theta = 0$ (Não Doente)	$\theta = 1$ (Doente)
Probabilidade	0,916	0,084

- Distribuição de probabilidades dos *valores do parâmetro* e suas probabilidades.

Repetindo o teste - resumo

Estados da natureza:

Estado (θ)	$\theta = 0(\overline{D})$	$\theta = 1(D)$
Probabilidade	0,98	0,02

Estados da natureza após primeiro exame positivo:

Estado ($\theta \vert y_1 = 1$)	$\theta = 0(\overline{D})$	$\theta = 1(D)$
Probabilidade	0,916	0,084

Estados da natureza após segundo exame positivo:

Estado ($\theta \vert y_1 = 1, y_2 = 1$)	$\theta = 0(\overline{D})$	$\theta = 1(D)$
Probabilidade	0,708	0,292

Estados da natureza após terceiro exame positivo:

Estado ($\theta \vert y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = 1$)	$\theta = 0(\overline{D})$	$\theta = 1(D)$
Probabilidade	0,350	0,650

Notações

$$P[D|+] = \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}]} \propto P[+|D] \cdot P[D]$$

$D : \theta = 1, \overline{D} : \theta = 0$ e $+ : Y = 1, - : Y = 0$

$$P[\theta = 1|Y = 1] = \frac{P[Y = 1|\theta = 1] \cdot P[\theta = 1]}{\sum_j P[Y = 1|\theta = j] \cdot P[\theta = j]}, j = \{0, 1\} \propto P[Y = 1|\theta = 1] \cdot P[\theta = 1]$$

$D : A_1, \overline{D} : A_2$ e $+ : B, - : \overline{B}$

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]} \propto P[B|A_j] \cdot P[A_j]$$

D : Hipótese e $+$: Evidência

$$P[H|E] = \frac{P[E|H] \cdot P[H]}{P[E|H] \cdot P[H] + P[E|\neg H] \cdot P[\neg H]} \propto P[E|H] \cdot P[H]$$

Probabilidades e *Odds*

Evento (A)	Probabilidade	Razão ($P(A)/P(\overline{A})$)	*Odds*
5 no lançamento de dado	$\frac{1}{6}$	$\frac{1/6}{5/6}$	1:5
Cara no lançamento de moeda	$\frac{1}{2}$	$\frac{1/2}{1/2}$	1:1
Figura em uma carta de baralho	$\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$	$\frac{12/52}{40/52}$	3:10
Prevalência no exemplo	$\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$	$\frac{2/100}{98/100}$	1:49

- Probabilidade (P): medida em $[0, 1]$.
- $\log(\frac{P}{1-P})$: medida em $[-\infty, +\infty]$.
- *Odds*: medida em $[0, +\infty]$.
- log(*Odds*): medida em $[-\infty, +\infty]$.

Odds no teste diagnóstico

$$\frac{P[D|+]}{P[\overline{D}|+]} = \frac{\frac{P[+|D]P[D]}{P[+]}}{\frac{P[+|\overline{D}]P[\overline{D}]}{P[+]}} = \frac{P[+|D]}{P[+|\overline{D}]} \cdot \frac{P[D]}{P[\overline{D}]}$$

Odds a posteriori =razão de verossimilhanças(LR) $\cdot$ *Odds* a priori

- (Neste caso) Razão de verossimilhanças (dados): fator de Bayes.
- Interpretação direta: quanto o dado (resultado do teste) modifica a *odds* a priori.

Odds no teste diagnóstico

Odds para Teste +

$$\frac{P[D|+]}{P[\overline{D}|+]} = \frac{P[+|D]}{P[+|\overline{D}]}\frac{P[D]}{P[\overline{D}]}$$

$$\frac{\text{vpp}}{1-\text{vpp}} = \frac{\text{sen}}{1-\text{esp}}\frac{\text{prev}}{1-\text{prev}}$$

$$= \frac{0,90}{0,20}\frac{2}{98} \quad (9:98 \approx 1:11)$$

Odds para Teste -

$$\frac{P[D|-]}{P[\overline{D}|-]} = \frac{P[-|D]}{P[-|\overline{D}]}\frac{P[D]}{P[\overline{D}]}$$

$$\frac{1-\text{vpn}}{\text{vpn}} = \frac{1-\text{sen}}{\text{esp}}\frac{\text{prev}}{1-\text{prev}}$$

$$= \frac{0,10}{0,80}\frac{2}{98} \quad (1:392)$$

Terminologia:

- $\text{LR}+ = \frac{\text{sen}}{1-\text{esp}}$: razão de verossimilança positiva
- $\text{LR}- = \frac{1-\text{sen}}{\text{esp}}$: razão de verossimilança negativa

Testes diagnóstico – resumo da terminologia

Exemplo de referência: sensibilidade = 90%, especificidade = 80%, prevalência = 2%.

Termo	Símbolo	Fórmula	Exemplo
Sensibilidade	sens	$P[+\|D]$	0,90
Especificidade	esp	$P[-\|\overline{D}]$	0,80
Prevalência (*a priori*)	prev	$P[D]$	0,02
Valor preditivo positivo	vpp	$P[D\|+]$	0,084
Valor preditivo negativo	vpn	$P[\overline{D}\|-]$	0,997
Razão de verossimilhança $+$	LR^+	$\frac{\text{sens}}{1-\text{esp}}$	4,50
Razão de verossimilhança $-$	LR^-	$\frac{1-\text{sens}}{\text{esp}}$	0,125
Odds a priori	–	$\frac{\text{prev}}{1-\text{prev}}$	1:49
Odds a posteriori $(+)$	–	$\frac{\text{vpp}}{1-\text{vpp}}$	$\approx$ 1:11
Odds a posteriori $(-)$	–	$\frac{1-\text{vpn}}{\text{vpn}}$	1:392

Alguns tópicos adicionais em *testes diagnóstico*

- Opinião especialista (subjetiva):
  probabilidade pré-teste.
- Estimação de características dos testes:
  probabilidades podem ser estimadas a partir de dados,
  dados organizados em tabelas de frequências/probabilidades.
- Desenho amostral:
  amostra aleatória (total fixado),
  desenho controlado (margens fixadas).
- Resposta contínua (ex. glicose):
  dicotomização para resultado,
  curva ROC para diferentes probabilidades ”de corte”.

Teorema de Bayes

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]}$$

- No exemplo só haviam duas categorias:

$$A_1(D) : \text{com a doença}, A_2(\overline{D}) : \text{sem a doença}.$$

- O resultado é mais geral, válido para várias categorias.
- Categorias são possíveis estados do sistema:
  - estados do sistema categóricos (ou ainda discretos ou enumeráveis),
  - estados do sistema em uma escala contínua:

$$f(\theta|y) = \frac{f(y|\theta) \cdot f(\theta)}{\int f(y|\theta) \cdot f(\theta) \mathrm{d}\theta}.$$

Comentários

- Dois ou mais testes:
  - sequenciais ou em paralelo,
  - testes com características diferentes,
  - estratégias para aplicação dos testes.
- Probabilidades em testes sequenciais assume *independência condicional* entre os testes.

$$P[\theta|\, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k] \propto P[\theta] \cdot P[Y_1|\theta] \cdot P[Y_2|\theta] \ldots \cdot P[Y_k|\theta]$$

- Fundamentação para o algoritmo Naïve Bayes em problemas de classificação.
- Probabilidades informadas por dados.
- Problemas de classificação e decisão:
  (spam, concessão de crédito, reconhecimento de padrão, etc).

Comentários

- Procedimento ilustra, de forma simplificada, o método científico.
  conhecimento atual $\longrightarrow$ nova informação $\longrightarrow$ conhecimento atualizado.
- Aprendizado sequencial.
- Notação de probabilidade condicional expressa tal atualização.
  $P[D|+]$.